

التمرين الاول (البنيات الجبرية)

$$(1) \text{ أ لدينا: } (\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2); x * y = x + y - 2 = y + x - 2 = y * x$$

$$\text{إذن } (\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2); x * y = y * x$$

ومنه القانون * تبادلي.

ولدينا

$$(\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3); (x * y) * z = (x * y) + z - 2 = x + y - 2 + z - 2 = x + (y + z - 2) - 2 = x + (y * z) - 2 = x * (y * z)$$

$$\text{إذن } (\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3); (x * y) * z = x * (y * z)$$

ومنه القانون * تجميعي

خلاصة :

القانون * تبادلي و تجميعي

$$\text{ب) ليكن } e \text{ من } \mathbb{Z} \text{ } (\forall x \in \mathbb{Z}); x * e = x \Leftrightarrow x + e - 2 = x \Leftrightarrow e = 2 \text{ و بما أن } * \text{ تبادلي فإن}$$

2 هو العنصر المحايد ل *

ج) ليكن x و y من \mathbb{Z}

$$x * y = 2 \Leftrightarrow x + y - 2 = 2 \Leftrightarrow y = 4 - x$$

إذن لكل x من \mathbb{Z} مماثل بالنسبة ل * هو $4 - x$

القانون * تبادلي و تجميعي ويقبل عنصرا محايد هو 2 ولكل x من \mathbb{Z} مماثل بالنسبة ل * هو $4 - x$ إذن

(Z, *) زمرة تبادلية.

$$(2) \text{ أ لدينا } (\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2); f(x) T f(y) = (x+2)(y+2) - 2(x+2) - 2(y+2) + 6$$

$$= xy + 2x + 2y + 4 - 2x - 4 - 2y - 4 + 6$$

$$= xy + 2$$

$$= f(xy)$$

$$\text{إذن } (\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2); f(x \times y) = f(x) T f(y)$$

نستنتج أن f تشاكل من (\mathbb{Z}, \times) نحو (\mathbb{Z}, T) وبما أن لكل x من \mathbb{Z} سابق و حيد ب f في \mathbb{Z} هو $x - 2$ فإن f تقابل من \mathbb{Z} نحو \mathbb{Z} و منه : f تشاكل تقابلي من (\mathbb{Z}, \times) نحو (\mathbb{Z}, T)

$$\text{ب) لدينا } (\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3); (x * y) T z = (x + y - 2) T z$$

$$= (x + y - 2) z - 2(x + y - 2) - 2z + 6$$

$$= (xz - 2x - 2z + 6) + (yz - 2y - 2z + 6) - 2$$

$$= (x T z) + (y T z) - 2$$

$$= (x T z) * (y T z)$$

ومنه

$$(\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3); (x * y) T z = (x T z) * (y T z)$$

$$(3) \text{ لدينا } (\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2); x T y = y T x \text{ إذن القانون } T \text{ تبادلي.}$$

وحسب السؤال (2) ب) نستنتج أن القانون T توزيعي على القانون *

بما أن f تشاكل تقابلي من (\mathbb{Z}, \times) نحو (\mathbb{Z}, T) و \times تجميعي في \mathbb{Z} فإن T تجميعي في \mathbb{Z} و بما أن $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية و T تجميعي و تبادلي و توزيعي على القانون $*$ فإن $(\mathbb{Z}, *, T)$ حلقة تبادلية

لنبين أن القانون T يقبل عنصرا محايدا e في \mathbb{Z}
 $(\forall x \in \mathbb{Z}), xTe = x \Leftrightarrow xe - 2x - 2e + 6 = x$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}; x(e-3) = 2(e-3)$$

$$\Leftrightarrow e = 3$$

إذن $\forall x \in \mathbb{Z}; xT3 = 3Tx = x$ هو العنصر المحايد للقانون T
 نستنتج من كل ما سبق أن

$(\mathbb{Z}, *, T)$ حلقة تبادلية وواحدية

(4) أ) لدينا $xTy = 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 2$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y-2) - 2(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ أو } y = 2$$

إذن

$$xTy = 2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ أو } y = 2$$

(ب) لدينا $xTy = 2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ أو } y = 2$ حيث 2 هو صفر الحلقة $(\mathbb{Z}, *, T)$

إذن

$(\mathbb{Z}, *, T)$ حلقة كاملة

(ج) لدينا $(\mathbb{Z}, *, T)$ حلقة تبادلية وواحدية

ولدينا $(\forall x \in \mathbb{Z} / \{2\}); xTy = 3 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 3$

$$\Leftrightarrow y(x-2) = 2x-3$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x-3}{x-2}$$

من أجل $x = 5$ نحصل على $y = \frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$

إذن 5 ليس له مقلوبا بالنسبة ل T
 نستنتج أن

$(\mathbb{Z}, *, T)$ ليس جسم

التمرين الثاني

I

(1) مميز المعادلة: $(E): 2z^2 - (3+i\sqrt{3})az + (1+i\sqrt{3})a^2 = 0$

لدينا $\Delta = (3+i\sqrt{3})^2 a^2 - 8(1+i\sqrt{3}) a^2 = (9+6i\sqrt{3}-3-8(1+i\sqrt{3}))a^2 = (-2-2i\sqrt{3})a^2 = (-1+i\sqrt{3})^2 a^2$

إذن

$$\Delta = (-1+i\sqrt{3})^2 a^2$$

(2) بما أن $a \in \mathbb{C}^*$ فإن لـ (E) حلين مختلفين هما :

$$z_2 = \frac{(3+i\sqrt{3})a - (-1+i\sqrt{3})a}{4} = a \text{ و } z_1 = \frac{(3+i\sqrt{3})a + (-1+i\sqrt{3})a}{4} = \frac{a+ai\sqrt{3}}{2}$$

ومنه مجموعة حلول (E) هي :

$$S = \left\{ a, \frac{a+ai\sqrt{3}}{2} \right\}$$

II

$$\frac{a}{b} = e^{i\frac{-\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{a}{b} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{a}{b}\right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{OA}{OB} = 1 \\ \widehat{(OA, OB)} \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \text{ لدينا (1)}$$

إذن

المثلث OAB متساوي الأضلاع

(2) أ) لدينا r دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{3}$ إذن r^{-1} دوران مركزه M وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

$$\begin{cases} B_1 = r(B) \\ A_1 = r^{-1}(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 - z = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - z) \\ a_1 - z = e^{-i\frac{\pi}{3}}(a - z) \end{cases} \text{ إذن}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = z + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(a - z) \\ b_1 = z + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(b - z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + z\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ b_1 = z\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + z\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ b_1 = z\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a \end{cases}$$

و منه

$$\begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \end{cases}$$

(ب) لدينا $a_1 + b_1 = z$ إذن $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OM}$ و منه

الرابعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع

$$\begin{cases} a_1 - z = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1 - z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - a_1 = e^{\frac{i-\pi}{3}}(z - a) \\ b_1 - z = ae^{\frac{i2\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z \end{cases} \text{ (3) لدينا}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 - z = e^{\frac{i2\pi}{3}}(z - a) \\ b_1 - z = -e^{\frac{i\pi}{3}}(z - ae^{\frac{i\pi}{3}}) \end{cases} \Rightarrow \frac{z - b_1}{z - a_1} = -e^{\frac{i-\pi}{3}} \frac{(z - a) \times \frac{b}{a}}{z - a}$$

$$\Rightarrow \frac{z - b_1}{z - a_1} = -\frac{a}{b} \times \frac{(z - b)}{z - a}$$

وأخيرا

$$\frac{z - b_1}{z - a_1} = -\frac{a}{b} \times \frac{z - b}{z - a}$$

(ب) المثلث OAB متساوي الأضلاع إذن النقط M و O و A و B غير مستقيمة .

$$M \text{ و } O \text{ و } A \text{ و } B \text{ متداورة} \Leftrightarrow \frac{b-z}{a-z} \div \frac{b-0}{a-0} \in \mathbb{R}$$

ومنه النقط

$$\Leftrightarrow \frac{b-z}{a-z} \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{z-b_1}{z-a_1} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow M \text{ و } A_1 \text{ و } B_1 \text{ مستقيمة}$$

نستنتج أن

النقط M و O و A و B متداورة يكافئ M و A_1 و B_1 مستقيمة

التمرين الثالث (الحسابيات)

(1) لدينا $n > 1$ و يحقق $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$ و أصغر قاسم أولي موجب ل n

$$\text{و منه } \begin{cases} n | 3^n - 2^n \\ p | n \end{cases} \text{ و بالتالي } 3^n - 2^n \equiv 0 [p]$$

لنبين أن $p \geq 5$

لدينا $\left(p = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3 | 2^n \\ 3 | 3^n - 2^n \end{cases} \Rightarrow 3 | 2^n \Rightarrow 3 | 2 \right)$ و $\left(p = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2 | 2^n \\ 2 | 3^n - 2^n \end{cases} \Rightarrow 2 | 3^n \Rightarrow 2 | 3 \right)$
و بما أن 2 لا يقسم 3 و 3 لا يقسم 2 فإن (الإستلزام المفاض للعكس) $p \neq 2$ و $p \neq 3$ نستنتج أن $p \geq 5$
ومنه

$$p \geq 5 \text{ و } 3^n - 2^n \equiv 0 [p]$$

(ب) بما أن $p \geq 5$ فإن p لا يقسم 2 و p لا يقسم 3
إذن حسب مبرهنة فرما الصغرى

$$3^{p-1} \equiv 1 [p] \text{ و } 2^{p-1} \equiv 1 [p]$$

(ج) بما أن p أصغر قاسم أولي موجب ل n فإن جميع قواسم $p-1$ لا تقسم n باستثناء 1
نستنتج أن $(p-1) \wedge n = 1$

إذن حسب مبرهنة بوزو يوجد (α, β) من \mathbb{Z}^2 بحيث $\alpha n + \beta(p-1) = 1$
و بوضع $\alpha = a$ و $b = -\beta$ نحصل على المطلوب

$$\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2; an - b(p-1) = 1$$

$$\begin{cases} an - b(p-1) = 1 \\ a = q(p-1) + r \end{cases} \Rightarrow 1 + b(p-1) = nq(p-1) + nr \Rightarrow nr = 1 + (b - nq)(p-1) \quad \text{د) لدينا}$$

بوضع $k = b - nq$ نحصل على $nr = 1 + k(p-1)$ مع $k \in \mathbb{Z}$

بقي أن نبين أن $k \in \mathbb{N}$

يكفي أن نبين أن $r \geq 1$

حسب السؤال ج) لدينا $(p-1) \wedge a = 1$ وبما أن $p-1 \geq 4$ فإن $p-1$ لا يقسم a ومنه $r \geq 1$

وبما أن $n > 1$ فإن $nr > 1$ ومن $nr-1 = k(p-1)$ نستنتج أن $k \in \mathbb{N}$

خلاصة

$$nr = 1 + k(p-1) \text{ يحقق } k \text{ طبيعي}$$

(2) نفترض أنه يوجد $n > 1$ ويحقق الخاصية (R)

لدينا حسب السؤال ب) $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ ولدينا $k \in \mathbb{N}$ إذن $2^{k(p-1)} \equiv 1[p]$ و $3^{k(p-1)} \equiv 1[p]$

وبما أن $nr-1 = k(p-1)$ فإن $2^{nr-1} \equiv 1[p]$ و $3^{nr-1} \equiv 1[p]$ ومنه $2^{nr} \equiv 2[p]$ و $3^{nr} \equiv 3[p]$

نستنتج أن $3^{nr} - 2^{nr} \equiv 1[p]$ (1)

و حسب السؤال 1) $3^n - 2^n \equiv 0[p]$ (أ)

يعني أن $3^n \equiv 2^n [p]$ أي أن $3^{nr} \equiv 2^{nr} [p]$ ما يعني أن $3^{nr} - 2^{nr} \equiv 0[p]$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $1 \equiv 0[p]$ أي أن p يقسم 1 وهذا تناقض

إذن الافتراض الأول خاطئ

خلاصة:

لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعاً من 1 ويحقق الخاصية (R)

المسألة

الجزء الأول

$$(1) \text{ لدينا } h(1) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x} \frac{1}{\ln x} = 1 \text{ (لأن } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \text{)}$$

نستنتج أن

h متصلة على يمين 1

$$(ب) \text{ لدينا } \ln x < x-1 \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t} dt < \int_1^x 1 dt \Rightarrow \frac{1}{t} < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \ln x < x-1 \text{ (لأن } \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \text{)}$$

إذن

$$(\forall x > 1); \ln x < x-1$$

$$\text{لدينا } h'(x) = \frac{x \ln x - (x-1)(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2} = \frac{\ln x - (x-1)}{(x \ln x)^2} \text{ (لأن } \ln x < x-1 \text{)}$$

وبما أن $(\forall x > 1); h'(x) < 0$ فإن $(\forall x > 1); \ln x < x-1$

إذن

h تناقصية قطعاً على $]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

جدول تغيرات h

x	1	$+\infty$
$h'(x)$		-
$h(x)$	1	0

(ب) بما أن h متصلة و تناقصية قطعاً على $[1, +\infty[$ فإن $]0, 1[= \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x); h(1) =]0, 1[$ ومنه $\forall x \geq 1; h(x) \in]0, 1[$ نستنتج أن

$$\forall x \geq 1; 0 < h(x) \leq 1$$

الجزء الثاني

$$(\forall x > 1); \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = [\ln |\ln t|]_x^{x^2} = \ln |\ln x^2| - \ln |\ln x| = \ln \left| \frac{2 \ln x}{\ln x} \right| = \ln 2 \quad (1) \text{ لدينا}$$

إذن

$$\forall x > 1; \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$$

(ب) لدينا

$$(\forall x > 1); g(x) - g(2) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{t} \ln t} - \frac{1}{t \ln t} \right) dt = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t \ln t} dt$$

إذن

$$(\forall x > 1); g(x) - g(2) = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t \ln t} dt$$

$$\begin{cases} t = x \Rightarrow \alpha = \sqrt{t} = \sqrt{x} \\ t = x^2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{t} = x \end{cases} \quad \text{ج) باستخدام مكاملة بتغيير المتغير و بوضع } \sqrt{t} = \alpha \text{ نحصل على}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow dt = 2\sqrt{t} d\alpha$$

$$(\forall x > 1); g(x) - g(2) = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t \ln t} dt = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\alpha-1}{\alpha^2 \ln \alpha^2} 2\alpha d\alpha = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\alpha-1}{\alpha \ln \alpha} d\alpha = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{t-1}{t \ln t} dt \quad \text{ومنّه}$$

نستنتج أن

$$(\forall x > 1); g(x) - g(2) = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{t-1}{t \ln t} dt$$

(أ) لدينا $\forall x > 1; \sqrt{x} \leq t \leq x$

h تناقصية قطعاً على $[1, +\infty[$ و $[1, +\infty[\subset]\sqrt{x}, x]$ إذن h تناقصية قطعاً على $[\sqrt{x}, x]$

$$\forall x > 1; \sqrt{x} \leq t \leq x \Rightarrow h(x) \leq h(t) \leq h(\sqrt{x}) \Rightarrow \int_{\sqrt{x}}^x h(x) dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x h(t) dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x h(\sqrt{x}) dt \quad \text{ومنّه}$$

$$\Rightarrow (x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$$

و بالتالي

$$(\forall x > 1); (x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$$

$$(\forall x > 1); \frac{(x - \sqrt{x})h(x)}{x-1} \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x-1} \leq \frac{(x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})}{x-1} \quad \text{(ب) لدينا حسب (2) (أ) من الجزء الثاني)}$$

$$(\forall x > 1); \frac{\sqrt{x}h(x)}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x-1} \leq \frac{\sqrt{x}h(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+1} \quad \text{و بعد إختزال $\sqrt{x}-1$ نحصل على}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - \ln 2}{x-1} = \frac{1}{2} \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}h(x)}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}h(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

نستنتج أن

$$g'_d(1) = \frac{1}{2} \quad \text{و أن } g \text{ قابلة للإشتقاق على يمين } 1$$

(ج) لدينا $(\forall x > 1); (x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2$

$$(\forall x > 1); (x - \sqrt{x}) \frac{x-1}{x \ln x} + \ln 2 \leq g(x) \quad \text{يستلزم}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) \frac{x-1}{x \ln x} + \ln 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} (\sqrt{x} - 1) \frac{x-1}{x} + \ln 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2 \ln \sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \ln 2 = +\infty$$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

كما لدينا $(\forall x > 1); \frac{(x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \frac{(x - \sqrt{x})h(\sqrt{x}) + \ln 2}{x}$

و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x}) \frac{x-1}{x \ln x} + \ln 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{\ln 2}{x} = 0$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x})h(\sqrt{x}) + \ln 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x} \ln \sqrt{x}} + \ln 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x \ln \sqrt{x}} + \frac{\ln 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}{\ln \sqrt{x}} + \frac{\ln 2}{x} = 0$

فإن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

(3) (أ) الدالة $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t} \ln t}$ متصلة على المجال $]1, +\infty[$ إذن تقبل دالة أصلية φ على هذا المجال

نستنتج أن $\forall x > 1; g(x) = \varphi(x^2) - \varphi(x)$

بما أن φ قابلة للإشتقاق على المجال $]1, +\infty[$ فإن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1, +\infty[$ كمركب دوال قابلة للإشتقاق

ولدينا $(\forall x > 1); g'(x) = 2x\varphi'(x^2) - \varphi'(x) = 2x \frac{1}{x \ln x^2} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x} \ln x} = \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x} \ln \sqrt{x}} = \frac{1}{2} h(\sqrt{x})$

و منه

$$\forall x > 1; g'(x) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x})$$

(ب) لدينا: $(\forall x \geq 1); 1 \leq \sqrt{x} \leq x \xrightarrow{h \searrow} h(x) \leq h(\sqrt{x}) \leq h(1) \xrightarrow{(h(x) > 0)} \frac{1}{2} h(x) \leq \frac{1}{2} h(\sqrt{x}) \leq \frac{h(1)}{2} \Rightarrow 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$

إذن

$$\forall x \geq 1; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$$

و منه جدول تغيرات الدالة g

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$\ln 2$	$+\infty$
		↗

(ج) منحنى الدالة g

الجزء الثالث

(1 I) الدالة قابلة للإشتقاق على $[1, +\infty[$ و $k'(x) = g'(x) - 1$ ولدينا $\forall x \in [1, +\infty[; -1 < g'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \forall x \in [1, +\infty[; -1 < k'(x) \leq -\frac{1}{2}$ نستنتج أن $\forall x \in [1, +\infty[; k'(x) < 0$ ومنه k تناقصية قطعاً على $[1, +\infty[$ و بما أنها متصلة عليه فإنها تقابل من $[1, +\infty[$ نحو $k([1, +\infty[)$ مع $k([1, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x), k(1)]$

$$k(1) = \ln 2 \text{ و } \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{g(x)}{x} - 1 \right) = -\infty \right)$$

نستنتج أن $k([1, +\infty[) =]-\infty, \ln 2]$

ومنه

$$k \text{ تقابل من } [1, +\infty[\text{ نحو }]-\infty, \ln 2]$$

(2) بما أن $0 \in]-\infty, \ln 2]$ فإن ل 0 سابق وحيد α بالدالة k من المجال $[1, +\infty[$ إذن $k(\alpha) = 0$ ومنه $g(\alpha) - \alpha + 1 = 0$

نستنتج أنه

$$\exists! \alpha \in [1, +\infty[/ 1 + g(\alpha) = \alpha$$

II (1) أ) برهان بالترجع

لدينا $1 \leq u_0 < \alpha$ ليكن n من \mathbb{N} نفترض أن $1 \leq u_n < \alpha$.

$$1 \leq u_n < \alpha \stackrel{(g \nearrow)}{\Rightarrow} g(1) \leq g(u_n) < g(\alpha) \quad \text{لدينا}$$

$$\Rightarrow \ln 2 \leq u_{n+1} - 1 < \alpha - 1$$

$$\Rightarrow \ln 2 + 1 \leq u_{n+1} < \alpha$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < \alpha$$

إذن حسب مبدأ التراجع

$$\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq u_n < \alpha$$

(ب) لدينا $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = 1 + g(u_n) - u_n = k(u_n)$ كما لدينا $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < \alpha \stackrel{(k \searrow)}{\Rightarrow} k(u_n) > k(\alpha)$ وبما أن $k(\alpha) = g(\alpha) - \alpha + 1 = 0$ نستنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n > 0$

(u_n) متتالية تزايدية قطعاً

(ج) (u_n) متتالية تزايدية قطعاً و مكبورة ب α إذن فهي متقاربة و لتكن l نهايتها
لدينا $l \geq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq u_n < \alpha$ و بما أن g متصلة على $[1, +\infty[$ فإن g متصلة عند l
إذن $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = 1 + g(u_n) \Rightarrow l = 1 + g(l) \Rightarrow k(l) = 0 \Rightarrow l = \alpha$
و بالتالي

$\lim u_n = \alpha$

(2) لدينا $\forall n \in \mathbb{N}; [u_n, \alpha] \subset [1, +\infty[$ إذن g متصلة على $[u_n, \alpha]$ و قابلة للإشتقاق على $]u_n, \alpha[$ و منه حسب مبرهنة التزايديات المنتهية لدينا

$$\exists c \in]u_n, \alpha[; \frac{g(u_n) - g(\alpha)}{u_n - \alpha} = g'(c)$$

و بما أن لكل n من \mathbb{N} لدينا: $1 \leq u_n < c < \alpha \Rightarrow c > 1 \Rightarrow 0 < g'(c) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |g'(c)| \leq \frac{1}{2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \left| \frac{g(u_n) - g(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| = |g'(c)| \leq \frac{1}{2} \text{ فإن } |g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \text{ ما يستلزم أن}$$

و بما أن $(\forall n \in \mathbb{N}); g(u_n) - g(\alpha) = u_{n+1} - \alpha$ فإن

$\forall n \in \mathbb{N}; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

(ب) برهان بالترجع

من أجل $n=0$ العلاقة تكتب $|u_0 - \alpha| \leq |u_0 - \alpha|$ وهذا صحيح

ليكن n من \mathbb{N} نفترض أن $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ و نبين أن $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$

لدينا $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$

و بالتالي و حسب مبدأ التراجع

$\forall n \geq 0; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

(ج) بما أن $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$ فإن $\lim |u_n - \alpha| = 0$

نستنتج أن

$\lim u_n = \alpha$

مرحب بملاحظاتكم عبر العنوان : y_mghazli@hotmail.com