Said .seddik@hotmail.fr

تصحيح الإمتحان الوطني لمادة الرياضيات

السنة الثانية علوم رياضية

يونيو 2011

ذ.سعيد الصديق ـــ تارودانت   Said .seddik@hotmail.fr

التمرين الأول

الجزء الأول :

❶ لنبين أن : $(\forall k \in \mathbb{N}) \quad A^{2k}=I$

لدينا :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

إذن :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad (\ A^2)^k = I^K = I$$

و بالتالي :

$$\boxed{(\forall k \in \mathbb{N}) \quad A^{2k} = I}$$

❷

لدينا $\quad A \times A = I$

إذن المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} بحيث :

$$\boxed{A^{-1} = A}$$

الجزء الثاني :

❶ أ– * قانون تركيب داخلي في I :

ليكن x و Y من : $I =]a; +\infty[$

Said .seddik@hotmail.fr

إذن $x - a > 0$ و $y - a > 0$

$$\Longrightarrow (x-a)(y-a) > 0$$

$$\Longrightarrow (x-a)(y-a) + a > a$$

$$\Longrightarrow x * y \in]a;+\infty[= I$$

ب- * تبادلي في I

ليكن x و Y من : $I =]a;+\infty[$

لدينا :

$$x * y = (x-a)(y-a) + a$$
$$= (y-a)(x-a) + a$$
$$= y * x$$

* تجميعي في I

ليكن x و Y و z من : $I =]a;+\infty[$

لدينا :

$$(x * y) * z = [(x-a)(y-a) + a] * z$$
$$= (x-a)(y-a)(z-a) + a$$

ومن جهة أخرى :

$$x * (y * z) = x * [(y-a)(z-a) + a]$$
$$= (x-a)(y-a)(z-a) + a$$

إذن :

$$\boxed{(x * y) * z = x * (y * z)}$$

ج. * تبادلي إ ذن : e هو العنصر المحايد بالنسبة لِ (I ;*) يكافئ :

Said .seddik@hotmail.fr

$$(\forall x \in I)\ \ x * e = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I)\ (x-a)(e-a)+a = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I)\ (x-a)(e-a)-(x-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I)\ (x-a)(e-a-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow e = a+1$$

$a+1$ هو العنصر المحايد في (I ;*)

❷ (I ;*) زمرة تبادلية :

ليكن x من I و x ‘ مماثله بالنسبة للقانون *

$$x * x' = a+1 \Leftrightarrow (x-a)(x'-a)+a = a+1$$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x'-a) = 1$$

$$\Leftrightarrow x'-a = \frac{1}{x-a}$$

$$\Leftrightarrow x' = a+\frac{1}{x-a} \in I$$

إذن كل عنصر x من I يقبل مماثلا $a+\frac{1}{x-a}$ في (I ;*) أي:

- * قانون تركيب داخلي تجميعي و تبادلي في (I ;*).
- * يقبل عنصرا محايدا : $a+1$.
- كل عنصر x من I يقبل مماثلا بالنسبة لِ*.

و بالتالي

(I ;*) زمرة تبادلية

❸ أ- φ تشاكل من (I ;*) نحو $(\mathbb{R}_+^*;\times)$

Said .seddik@hotmail.fr

ليكن **x** و **y** من **I** :

لدينا

$$\varphi(x * y) = \varphi[(x-a)(y-a)+a]$$

$$= \frac{1}{(x-a)(y-a)}$$

$$= \frac{1}{x-a} \times \frac{1}{y-a}$$

$$= \varphi(x) \times \varphi(y)$$

φ تقابل من I نحو $\mathbb{R}_+^*$:

ليكن **y** من $\mathbb{R}_+^*$ ، لنحل في **I** المعادلة :

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x-a} = y$$

$$\Leftrightarrow x - a = \frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow x = a + \frac{1}{y} \quad \in I$$

المعادلة لها حل وحيد في **I** إذن **φ** تقابل من **I** نحو $\mathbb{R}_+^*$.

و بالتالي :

φ تشاكل تقابلي من (I ;*) نحو $(\mathbb{R}_+^*;\times)$

ب- لنحل في المجموعة **I** المعادلة: $x * x * x = a^3 + a$

$$\Leftrightarrow \varphi(x * x * x) = \varphi(a^3 + a)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) \times \varphi(x) \times \varphi(x) = \frac{1}{a^3}$$

$$\Leftrightarrow (\varphi(x))^3 = \frac{1}{a^3}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{a}$$

Said .seddik@hotmail.fr

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-a} = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow x - a = a$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2a$$

و بالتالي :

$$\boxed{S_I = \{2a\}}$$

التمرين الثاني :

❶ N يقبل القسمة على 11 :

$$N = \underbrace{111 \ldots \ldots \ldots 11}_{\text{2010 مرة من 1}} = 11 \times 10^{2008} + 11 \times 10^{2006} + \cdots + 11 \times 10^{2} + 11$$

$$= 11(10^{2008} + 10^{2006} + \cdots + 10^{2} + 1)$$

$$= 11k \quad / k \in \mathbb{N}$$

❷ أ– 2011 أولي :

- لدينا : $\sqrt{2011} = 44.8 \ldots$ و 2011 لايقبل القسمة على :

43;41 ;37 ;31 ;29 ;23 ;19 ;17 ;13 ;11 ;7 ;5 ;3 ;2

– لدينا :

$$10^{2010} - 1 = (10-1)(10^{2009} + 10^{2008} + \cdots 10 + 1)$$

$$= 9N$$

ب– 2011 يقسم 9N :

2011 أولي حسب مبرهنة – فيرما – فإن : $10^{2011} \equiv 10[2011]$

وبماأن $2011 \wedge 10 = 1$ فإن : $10^{2010} \equiv 1[2011]$

Said .seddik@hotmail.fr

أي 2011 يقسم $10^{2010}-1$

إذن

$\boxed{2011 \text{ يقسم } 9N}$

ج- 2011 يقسم N :

لدينا : 2011 يقسم 9N ، وأولي مع 9 حسب مبرهنة –كوص – فإن :

$\boxed{2011 \text{ يقسم } N}$

❸ N يقبل القسمة على 22121 :

العددان 2011 و 11 أوليان فيما بينهما و يقسمان N

إذن 11×2011 يقسم N أي :

$\boxed{22121 \text{ يقسم } N}$

التمرين الثالث :

الجزء الأول :

❶ نضع $p(z)=z^2+[(1-i)m-4]z-im^2-2(1-i)m+4$

لدينا :

$$\begin{aligned}p(z_1)&=(2-m)^2+[(1-i)m-4](2-m)-im^2-2(1-i)m+4\\&=\cancel{4}-\cancel{4m}+m^2+2(1\cancel{-}i)m-\cancel{8}-(1-i)m^2+\cancel{4m}-im^2-2(1\cancel{-}i)m+\cancel{4}\\&=m^2-m^2+im^2-im^2\\&=0\end{aligned}$$

و بالتالي z_1 حل للمعادلة (E_m)

Said .seddik@hotmail.fr

❷ أ–

z_1 وz_2 حلان للمعادلة :

$az^2+bz+c=0$

$z_1z_2=\dfrac{c}{a}$

$$z_1z_2=1 \Leftrightarrow -im^2-2(1-i)m+4=1$$
$$\Leftrightarrow im^2+2(1-i)m-3=0$$

ب– لنحدد قيم m بحيث $z_1z_2=1$:

لنحل المعادلة :

$$im^2+2(1-i)m-3=0$$

لدينا

$$\Delta'=(1-i)^2+3i=i=e^{i\frac{\pi}{2}}=\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

إذن :

$$m=\frac{i-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{i}=\ 1+i-i\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

أو

$$m=\frac{i-1-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}{i}=\ 1+i+i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$$

و بالتالي :

$$\boxed{m\epsilon\left\{1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i(1-\frac{\sqrt{2}}{2});1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}}$$

الجزء الثاني :

❶ أ– لدينا:

$$S: M(z)\to M'(z')\ \ /z'-1=-(z-1)$$

Said .seddik@hotmail.fr

إذن $$z' - 1 = -(z-1) = e^{i\pi}(z-1)$$

أي S هو الدوران الذي مركزه I(1) وزاويته π ،

وبالتالي :

S هو التماثل المركزي S_I:

ب–

$$M"=\mathrm{R(M)} \Rightarrow z" - 1 - i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1)$$

$$\Rightarrow z" = i(z-1-i) + 1 + i$$

$$\Rightarrow z" = iz - i + 1 + 1 + i$$

$$\Rightarrow z" = iz + 2$$

❷

أ– لدينا : $$\frac{z"-2}{z-2} = \frac{iz}{-z} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

إذن المثلث AM'M'' قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A

ب– لنحدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و $M"$ متداورة:

النقط A و Ω و M' و $M"$ غير مستقيمية لأن AM'M'' مثلث :

إذن : النقط A و Ω و M' و $M"$ متداورة يكافئ:

$$(\overrightarrow{\Omega M'};\overrightarrow{\Omega M"}) \equiv (\overrightarrow{AM'};\overrightarrow{AM"})\ [\pi]$$

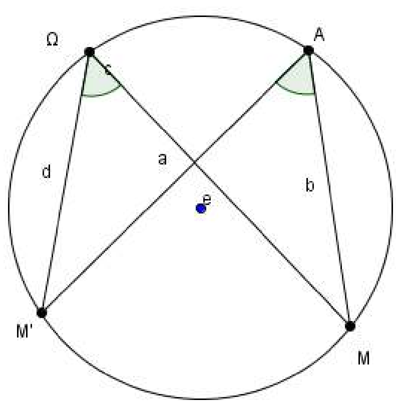
$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z"-1-i}{z'-1-i}\right) \equiv \arg\left(\frac{z"-2}{z'-2}\right)\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{iz+1-i}{-z+1-i}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{iz+1-i}{-z+1-i} \in i\mathbb{R}$$

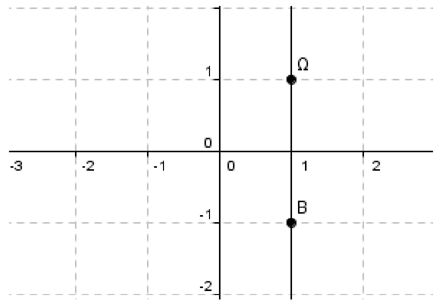
$$\Leftrightarrow \frac{z-i-1}{z-1+i} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-(1+i)}{z-(1-i)} \in \mathbb{R}$$



Said .seddik@hotmail.fr

$$\Leftrightarrow M \in (\Omega B) \ / \ B(1-i)$$



و بالتالي

مجموعة النقط M هي المستقيم الذي معادلته : x=1

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

❶ ليكن X من $\left[0,1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$:

$$n = f(x) \Leftrightarrow n = \frac{x}{lnx}$$

$$\Leftrightarrow nlnx = x$$

$$\Leftrightarrow lnx^n = x$$

$$\Leftrightarrow x^n = e^x$$

❷ **f قابلة لإشتقاق على يمين 0**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{lnx}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{lnx} = 0$$

إذن : **f قابلة لإشتقاق على يمين 0 و $f_d{}'(0) = 0$** .

❸

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{lnx} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{lnx} = +\infty$$

(C) يقبل المستقيم الذي معادلته x=1 مقاربا عموديا.

Said .seddik@hotmail.fr

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{lnx} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{lnx} = 0$$

(C) يقبل محور الأفاصيل إتجاها مقاربا بجوار $+\infty$.

❹ تغيرات الدالة على كل من المجالين : $[0;1[$ و $]1;+\infty[$:

لدينا : $f'(x) = \frac{lnx-1}{(lnx)^2}$

إشارة f′ هي إشارة lnx-1 :

$$lnx - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$$

x	0		1		e		$+\infty$
f′(x)		−	‖	−	0	+	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

❺ (C) يقبل نقطة إنعطاف :

لدينا :

$$f''(x) = \frac{lnx(2-lnx)}{x(lnx)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow lnx(2 - lnx) = 0$$

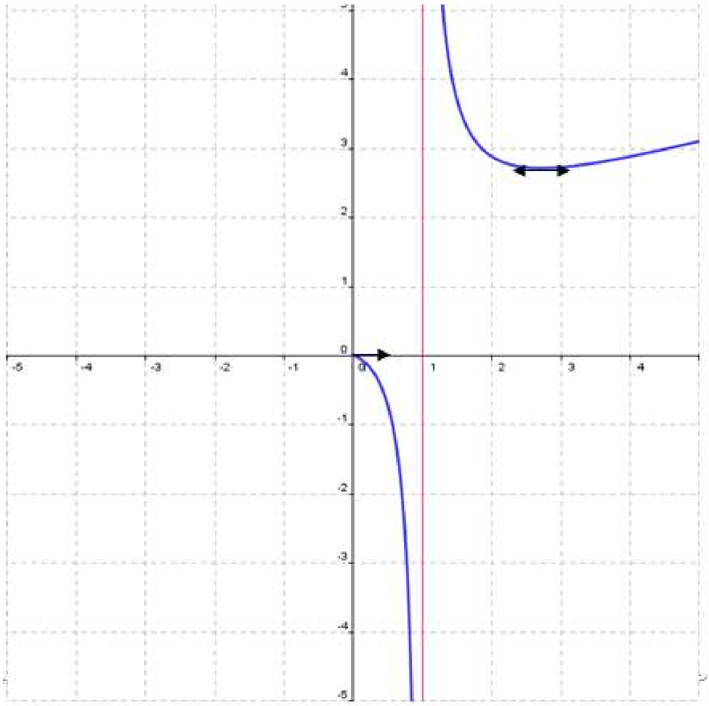
$$\Leftrightarrow 2 - lnx = 0$$

$$\Leftrightarrow x = e^2$$

إذن f′′ تنعدم وتغير الإشارة عند $x=e^2$ و بالتالي (C) يقبل نقطة إنعطاف: $I(e^2 ;\frac{e^2}{2})$

Said .seddik@hotmail.fr

❻ منحنى (c) :



❼

من خلال التمثيل المبياني للدالة f نلاحظ : المستقيم الذي معادلته y=n بحيث $n \geq 3$ يقطع (c) في

نقطتين أفصولاهما a_n و b_n بحيث : $1 < a_n < e < b_n$

الجزء االثاني :

❶

* لدينا $(\forall n \geq 3) \;\; b_n > e$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) \; ln(b_n) > 1$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) \; \frac{1}{ln(b_n)} < 1$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) \; \frac{b_n}{ln(b_n)} < b_n$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) \; f(b_n) < b_n$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) \quad n < b_n$$

Said .seddik@hotmail.fr

* بما أن $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ فإن : $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

❷ أ– * لدينا $(\forall n \geq 3)\ \ f(a_n) = n$ و $f(a_{n+1}) = n+1$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3)\ \ f(a_n) < f(a_{n+1})$$

بما أن a_n و a_{n+1} من $]1;e]$ و f تناقصية قطعا على المجال : $]1;e]$.

فإن $(\forall n \geq 3)\ \ a_n > a_{n+1}$

و بالتالي

$$\boxed{\text{المتتالية } (a_n)_{n\geq 3} \text{ تناقصية}}$$

* المتتالية $(a_n)_{n\geq 3}$ تناقصية ومصغورة بالعدد **1** إذن فهي متقاربة.

ب– لدينا $(\forall n \geq 3)\ a_n^n = e^{a_n}$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3)\ \ln(a_n^n) = \ln(e^{a_n})$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3)\ n\ln(a_n) = a_n$$

$1 < a_n < e$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3)\ 1 < n\ln(a_n) < e$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3)\ \frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$$

لدينا :

$$(\forall n \geq 3)\ e^{\frac{1}{n}} < a_n < e^{\frac{e}{n}}$$

و

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{e}{n}} = e^0 = 1$$

وبالتالي :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

Said .seddik@hotmail.fr

ج- لدينا $a_n^n = e^{a_n}$

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ و الدالة $x \to e^x$ متصلة في 1 فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^n = \lim_{n\to+\infty} e^{a_n} = e^1 = e$$

التمرين الخامس :

❶ أ- لنبين أن : $(\forall x \geq 0)\ \ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

لدينا : $(\forall t \epsilon IR)\ 0 \leq e^{-t^2} \leq 1$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0)\ 0 \leq \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x dt$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0)\ 0 \leq \int_0^x e^{-t^2} dt \leq x$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0)\ 0 \leq e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \leq xe^{-x^2}$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0)\ \ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$$

ب- لدينا:

$$(\forall x \geq 1)\ x^2 \geq x$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 1) - x^2 \leq -x$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 1) e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

لدينا : $(\forall x \geq 0)\ \ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

إذن : $(\forall x \geq 0)\ \ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x}$

و بما أن : $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ فإن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$$

Said .seddik@hotmail.fr

❷ الدالة $t \to e^{-t^2}$ متصلة على المجال : $[0;+\infty[$ إذن فهي تقبل دالة أصلية **U** على المجال $[0;+\infty[$

إذن : $$(\forall x \geq 0)\ \ F(x) = e^{-x^2}[U(x) - U(0)]$$

الدالتان: $x \to U(x) - U(0)$ و $x \to e^{-x^2}$ قابلتان للإشتقاق على $[0;+\infty[$

إذن : **F** قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ ـــ جداء دالتين قابلتين للإشتقاق ـــ

و $$(\forall x \geq 0)\ F'(x) = \left(e^{-x^2}\right)'[U(x) - U(0)] + e^{-x^2}[U(x) - U(0)]'$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0)\ F'(x) = -2xe^{-x^2}[U(x) - U(0)] + e^{-x^2}U'(x)$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0)\ F'(x) = -2xF(x) + e^{-x^2}e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0)\ F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$$

❸ أ- **G** متصلة على يسار $\frac{\pi}{2}$

لنضع **y=tanx** إذن : $$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} G(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} F(\tan x) = \lim_{y\to+\infty} F(y) = 0 = G\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

و بالتالي **G** متصلة على يسار $\frac{\pi}{2}$.

ب– لدينا :

– الدالة : $x \to \tan x$ متصلة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

– $\tan\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right) = [0;+\infty[$.

– **F** متصلة على $[0;+\infty[$.

إذن **G** متصلة على المجال : $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ و بما أنها متصلة على يسار $\frac{\pi}{2}$.

فإن: $$\boxed{G \text{ متصلة على المجال : } \left[0;\frac{\pi}{2}\right]}$$

بنفس الطريقة نبين أن $$\boxed{G \text{ قابلة للإشتقاق على المجال } \left]0;\frac{\pi}{2}\right[}$$

Said .seddik@hotmail.fr

و لدينا : $G(0) = G(\frac{\pi}{2})$

و بالتالي حسب مبرهنة – روول – يوجد عدد c′ من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث : G′(c′)= 0

$$\Rightarrow \exists c = \tan c' \in]0;+\infty[\;/\; (c^2+1)F'(c) = 0$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0;+\infty[\;/\; F'(c) = 0$$

ولدينا :

$$F'(c) = e^{-2c^2} - 2cF(c) = 0$$

إذن

$$\boxed{F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}}$$

❹

أ– الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$:

لدينا :

$$(\forall x \geq 0)\; F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$$

إذن

$$(\forall x > 0)\; \frac{F'(x)}{2x} = \frac{e^{-x^2}}{2x} - e^{x^2}F(x)$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0)\; \frac{F'(x)}{2x} = \frac{e^{-x^2}}{2x} - e^{x^2}F(x)$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0)\; H(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_0^x e^{-t^2}dt$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0)\; H'(x) = \frac{-4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}}{4x^2} - e^{-x^2} < 0$$

و بالتالي

$$\boxed{H \text{ تناقصية قطعا على المجال }]0;+\infty[}$$

Said .seddik@hotmail.fr

ب– لدينا $$H(c) = \frac{F'(c)}{2c} = 0$$

بما أن الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$ فإن :

$$\exists !\, \mathbf{c} \in]0;+\infty[\ /H(c) = 0$$

$$\Rightarrow \exists !\, \mathbf{c} \in]0;+\infty[\ /\frac{F'(c)e^{c^2}}{2c} = 0$$

$$\Rightarrow \exists !\, \mathbf{c} \in]0;+\infty[\ /F'(c) = 0$$

جدول تغيرات الدالة F :

إذا كان: $x \le c$ فإن $H(x) \ge H(c)$ لأن H تناقصية على المجال $]0;+\infty[$

إذن $$(\forall x \ge c)\ \frac{F'(x)}{2x}e^{x^2} \ge 0$$

أي $$(\forall x \ge c) F'(x) \ge 0$$

و بالتالي:

F تزايدية على المجال : $]0;c]$

بنفس الطريقة نبين أن :

F تناقصية على المجال : $[c;+\infty[$

x	0		c		$+\infty$
F	0	↗	$\frac{e^{-2c^2}}{2c}$	↘	0