وزارة التربية الوطنيــــة الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين جهة الدار البيضاء الكبرى najahe.net	**تصحيح الامتحان الوطني الموحد** **السنة الثانية سلك البكالوريا** **شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)** **يونيــــو** 2012	إنجـاز : ذ. محمد حمدان ثانوية أبي حيان التوحيدي نيابـة النواصـــــر

التمرين الأول

I− نعتبر المصفوفتين: $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ و $\mathcal{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

❶ حساب $\mathcal{I}-\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}^2$ لدينا:

$$\mathcal{A}^2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

و $\mathcal{I}-\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

❷ حسب السؤال ❶ لدينا: $\mathcal{A}^2=\mathcal{I}-\mathcal{A}$ إذن

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2=\mathcal{I}-\mathcal{A} &\iff \mathcal{A}^2+\mathcal{A}=\mathcal{I}\\ &\iff \mathcal{A}\times(\mathcal{A}+\mathcal{I})=(\mathcal{A}+\mathcal{I})\times\mathcal{A}=\mathcal{I}\end{aligned}$$

و بالتالي $\mathcal{A}$ تقبل مقلوبة $\mathcal{A}^{-1}$ في $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ حيث:

$$\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{A}+\mathcal{I}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

II− لكل عددين حقيقيين a و b من المجال $I=]1;+\infty[$ نضع:

$$a\star b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$$

❶ ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned}(x^2-1)(y^2-1)+1 &= x^2y^2-x^2-y^2+1+1\\ &= x^2y^2-x^2-y^2+2\end{aligned}$$

❷ نبين أن $\star$ قانون تركيب داخلي في I:

لتكن a و b و a' و b' من I لدينا :

$$\begin{aligned}a>1 \text{ و } b>1 &\Longrightarrow a^2>1 \text{ و } b^2>1\\ &\Longrightarrow a^2-1>0 \text{ و } b^2-1>0\\ &\Longrightarrow (a^2-1)(b^2-1)+1>1\\ &\Longrightarrow a\star b=\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)+1}>1\\ &\Longrightarrow a\star b\in I\end{aligned}$$

و لدينا كذلك

$$\begin{aligned}a=a' \text{ و } b=b' &\Longrightarrow \sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}=\sqrt{a'^2b'^2-a'^2-b'^2+2}\\ &\Longrightarrow a\star b=a'\star b'\end{aligned}$$

و بالتالي فإن $\star$ قانون تركيب داخلي في I.

❸ نعتبر التطبيق:

$$\begin{aligned}\varphi\ :\ \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow I\\ x &\longmapsto \sqrt{x+1}\end{aligned}$$

أ) نبين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}^{+*};\times\right)$ نحو $(I;\star)$.

◄ ليكن x و y من I لدينا: $\varphi(x\times y)=\varphi(xy)=\sqrt{xy+1}$

و لدينا كذلك

$$\begin{aligned}\varphi(x)\star\varphi(y) &= \sqrt{\left(\varphi(x)^2-1\right)\left(\varphi(y)^2-1\right)+1}\\ &= \sqrt{\left(\sqrt{x+1}^2-1\right)\left(\sqrt{y+1}^2-1\right)+1}\\ &= \sqrt{xy+1}\end{aligned}$$

خلاصة φ تشاكل من $\left(\mathbb{R}^{+*};\times\right)$ نحو $(I;\star)$.

◄ ليكن y عنصرا من I و x عنصرا من $\mathbb{R}^{+*}$ لدينا:

$$\begin{aligned}\varphi(x)=y &\iff \sqrt{x+1}=y\\ &\iff \sqrt{x+1}^2=y^2\\ &\iff x=y^2-1\end{aligned}$$

و بما أن $y>1$ فإن $y^2-1>0$ و بالتالي فلكل y من I المعادلة $\varphi(x)=y$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^{+*}$ هو $x=y^2-1$ إذن φ تقابل من $\mathbb{R}^{+*}$ نحو I.

ب) لدينا $\left(\mathbb{R}^{+*};\mathrm{x}\right)$ زمرة تبادلية و φ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}^{+*};\mathrm{x}\right)$ نحو $(I;\star)$ إذن $(I;\star)$ زمرة تبادلية

ج) نبين أن $\Gamma=\left\{\sqrt{1+2^m}\ /\ m\in\mathbb{Z}\right\}$ زمرة جزئية من $(I;\star)$.

تذكير: إذا كان f تشاكل من $(E;*)$ نحو $(F;\top)$ و x' هو مماثل x في $(E;*)$ فإن $f(x')$ هو مماثل $f(x)$ في $(F;\top)$.

• لدينا $\Gamma\neq\emptyset$ لأن $\sqrt{2}=\sqrt{1+2^0}\in\Gamma$.

• ليكن x و y من Γ إذن يوجد m و n من $\mathbb{Z}$ بحيث $x=\sqrt{1+2^m}$ و $y=\sqrt{1+2^n}$.

و منه $x=\varphi\left(2^m\right)$ و $y=\varphi\left(2^n\right)$ لدينا:

$$\begin{aligned}x\star y' &= \varphi\left(2^m\right)\star\left(\varphi\left(2^n\right)\right)'\\ &= \varphi\left(2^m\right)\star\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)\\ &= \varphi\left(2^m\mathrm{x}\frac{1}{2^n}\right)\\ &= \varphi\left(2^{m-n}\right)=\sqrt{1+2^{m-n}}\end{aligned}$$

لدينا $m-n\in\mathbb{Z}$ إذن $x\star y'\in\Gamma$ و بالتالي Γ زمرة جزئية للزمرة $(I;\star)$.

التمرين الثاني

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$

I− نعتبر المعادلة : $(E):iz^2+(2-i)az-(1+i)a^2=0$ حيث $a\in\mathbb{C}^*$.

❶ نجد $\Delta=-a^2=(ia)^2$ و حلول المعادلة (E) هما $z_1=ia$ و $z_2=(1+i)a$.

❷ أ) $z_1z_2=ia(1+i)a=a^2(i-1)$.

ب) لدينا z_1z_2 عدد عقدي غير منعدم لأن $a\in\mathbb{C}^*$. إذن

$$\begin{aligned}z_1z_2\in\mathbb{R}^* &\iff \arg\left(z_1z_2\right)\equiv 0[\pi]\\ &\iff \arg\left(a^2(i-1)\right)\equiv 0[\pi]\\ &\iff \arg\left(a^2\right)+\arg\left((i-1)\right)\equiv 0[\pi]\\ &\iff 2\arg(a)+\arg(-1)+\arg\left((1-i)\right)\equiv 0[\pi]\\ &\iff 2\arg(a)+\pi-\frac{\pi}{4}\equiv 0[\pi]\\ &\iff 2\arg(a)\equiv -\frac{3\pi}{4}[\pi]\\ &\iff \arg(a)\equiv -\frac{3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

II− ليكن $c\in\mathbb{R}^*$ و $z\in\mathbb{C}^*$. لتكن $A(1)$ و $B(1+i)$ و $C(c)$ و $D(ic)$ و $M(z)$.

❶ أ) نبين أن : A و D و M مستقيمية $\iff z(ic+1)+\overline{z}(ic-1)=2ic$.

• دراسة الحالات الخاصة $M\equiv A$ أو $M\equiv D$ $\cdots$

• نفترض أن $M\neq A$ و $M\neq D$. تكون النقط A و D و M مستقيمية إذا و فقط إذا كان $\frac{Z_M-Z_A}{Z_D-Z_A}\in\mathbb{R}^*$. لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{Z_M-Z_A}{Z_D-Z_A}\in\mathbb{R}^* &\iff \overline{\left(\frac{z-1}{ic-1}\right)}=\frac{z-1}{ic-1}\\ &\iff \frac{\overline{z-1}}{\overline{ic-1}}=\frac{z-1}{ic-1}\\ &\iff \frac{\overline{z}-1}{-ic-1}=\frac{z-1}{ic-1} \qquad (\overline{c}=c)\\ &\iff (\overline{z}-1)(ic-1)=(z-1)(-ic-1)\\ &\iff \overline{z}(ic-1)-ic+1=-z(ic+1)+ic+1\\ &\iff (ic+1)z+(ic-1)\overline{z}=2ic\end{aligned}$$

إذن A و D و M مستقيمية $\iff z(ic+1)+\overline{z}(ic-1)=2ic$.

ب) نبين أن : $(AD)\perp(OM) \iff (ic+1)z-(ic-1)\overline{z}=0$.

$$\begin{aligned}
(AD)\perp(OM) &\iff \arg\left(\frac{z-0}{ic-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\\
&\iff \frac{z}{ic-1}\in i\mathbb{R}^*\\
&\iff \overline{\left(\frac{z}{ic-1}\right)}=-\frac{z}{ic-1}\\
&\iff \frac{\overline{z}}{-ic-1}=-\frac{z}{ic-1} \qquad\qquad (\overline{c}=c)\\
&\iff \overline{z}(ic-1)=-z(-ic-1)\\
&\iff z(ic+1)=\overline{z}(ic-1)\\
&\iff (ic+1)z-(ic-1)\overline{z}=0
\end{aligned}$$

❷ ليكن h لحق النقطة H ، المسقط العمودي للنقطة O على (AD) .

أ) نبين أن: $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$.

• لدينا H هي المسقط العمودي للنقطة O على (AD) إذن $(AD)\perp(OH)$ و منه حسب II) ❶ ب) لدينا: $(ic+1)h-(ic-1)\overline{h}=0$ (1).

• لدينا H هي المسقط العمودي للنقطة O على (AD) إذن النقط A و D و H مستقيمية و منه حسب II) ❶ أ) لدينا: $(ic+1)h+(ic-1)\overline{h}=2ic$ (2).

من (1) و (2) نستنتج أن $(ic+1)h=ic$.

لدينا إذن

$$\begin{aligned}
(ic+1)h=ic &\iff ich+h=ic\\
&\iff ic(h-1)=-h\\
&\iff h-1=\frac{ih}{c} \qquad (c\neq 0)\\
&\iff h-1-i=\frac{ih}{c}-i\\
&\iff h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)
\end{aligned}$$

ب) لدينا حسب السؤال السابق $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$ أي أن $\frac{Z_H-Z_B}{Z_H-Z_C}=\frac{i}{c}$. و بما أن $\frac{i}{c}\in i\mathbb{R}^*$ $(c\in\mathbb{R}^*)$ فإن $\arg\left(\frac{Z_H-Z_B}{Z_H-Z_C}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ و بالتالي $(BH)\perp(CH)$.

التمرين الثالث

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E):\ 143x-195y=52$.

❶ (أ) لدينا $195=3\text{x}5\text{x}13$ و $143=11\text{x}13$ إذن $143\wedge195=13$. و بما أن 13 يقسم 52 فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

(ب) الزوج $(-1;-1)$ حل خاص للمعادلة (E)
إذن $143.(-1)-195.(-1)=52$.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff 143x-195y=143.(-1)-195.(-1)\\
&\iff 143(x+1)=195(y+1)\\
&\iff 11(x+1)=15(y+1) \qquad (\bigstar)\\
&\implies 11|15(y+1)
\end{aligned}$$

لدينا $15\wedge11=1$ إذن حسب مبرهنة كوص 11 يقسم $y+1$ و منه يوجد k من $\mathbb{Z}$ بحيث : $y=11k-1$. نعوض في $(\bigstar)$ نحصل على $x=15k-1$. عكسيا نتحقق أن الزوج $(15k-1;11k-1)$ حل للمعادلة (E). و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S=\{(15k-1;11k-1)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.

❷ ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم و أولي مع 5. لدينا 5 عدد أولي و $n\wedge5=1$ إذن حسب مبرهنة فيرما $n^4\equiv1[5]$ و منه لكل k من $\mathbb{N}$ لدينا $n^{4k}\equiv1^k\equiv1[5]$.

❸ ليكن x و y من $\mathbb{N}^*$ بحيث $x\equiv y[4]$.

أ) إذا كان $n\equiv0[5]$ فإن $n^x\equiv0[5]$ و $n^y\equiv0[5]$ إذن $n^x\equiv n^y[5]$.
إذا كان $n\not\equiv0[5]$ فإن $n\wedge5=1$ إذن $(\forall k\in\mathbb{N}):n^{4k}\equiv1[5]$ (حسب ❷)
• الحالة (1) : $x\geqslant y$ إذن يوجد k من $\mathbb{N}$ بحيث : $x=4k+y$.
إذن $n^x=n^{4k+y}=n^{4k}.n^y\equiv1.n^y\equiv n^y[5]$. (لأن $n^{4k}\equiv1[5]$)
• الحالة (2) : $y\geqslant x$ إذن يوجد k من $\mathbb{N}$ بحيث : $y=4k+x$.
إذن $n^y=n^{4k+x}=n^{4k}.n^x\equiv1.n^x\equiv n^x[5]$. (لأن $n^{4k}\equiv1[5]$)

ب) نبين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $n^x \equiv n^y[10]$.

✓ إذا كان n زوجي فإن $n^x \equiv 0[2]$ و $n^y \equiv 0[2]$ إذن $n^x \equiv n^y[2]$.

✓ إذا كان n فردي فإن $n^x \equiv 1[2]$ و $n^y \equiv 1[2]$ إذن $n^x \equiv n^y[2]$.

في كلتا الحالتين لدينا $n^x \equiv n^y[2]$ و منه 2 يقسم $n^x - n^y$ و لدينا حسب السؤال السابق 5 يقسم $n^x - n^y$ و بما أن 2 و 5 أوليان فيما بينهما فإن $2x5 = 10$ يقسم $n^x - n^y$ أي أن $n^x \equiv n^y[10]$.

❹ x و y من $\mathbb{N}^*$ بحيث الزوج $(x;y)$ حل للمعادلة (E) .

لدينا $(x;y)$ حل للمعادلة (E) إذن $x = 15k - 1$ و $y = 11k - 1$ و منه $x - y = 4k \equiv 0[4]$ أي أن $x \equiv y[4]$ إذن حسب السؤال السابق $n^x \equiv n^y[10]$ و بالتالي العددان n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري.

إضافة: ليكن r هو رقم الوحدات في نظمة العد العشري للعدد n^x ، و s هو رقم الوحدات في نظمة العد العشري للعدد n^y إذن $n^x \equiv r[10]$ و $n^y \equiv s[10]$ حيث $0 \leqslant r \leqslant 9$ و $0 \leqslant s \leqslant 9$. لدينا $r \equiv s[10]$ و منه 10 يقسم $r - s$ ، و $-9 \leqslant r - s \leqslant 9$ إذن $r - s = 0$ أي أن $r = s$.

التمرين الرابع

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$.

❶ حساب النهايتين: لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \frac{e^{-x}}{n} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{t\to+\infty} -t + \frac{e^t}{n} = \lim_{t\to+\infty} t\left(-1 + \frac{e^t}{nt}\right) = +\infty \qquad (t = -x)$$

لأن $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

❷ أ) لدينا $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$

و $\lim_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{e^{-x}}{nx}\right) = \lim_{t\to+\infty} \left(1 - \frac{e^t}{nt}\right) = -\infty$.

إذن $(\mathscr{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

ب) • لدينا $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

و $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) - y = \lim_{x\to+\infty} x + \frac{e^{-x}}{n} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0$.

و بالتالي المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$ بجوار $+\infty$.

• لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f_n(x) - y = \frac{e^{-x}}{n} > 0$ إذن المنحنى $(\mathscr{C}_n)$ يوجد فوق المستقيم (D).

❸ الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (مجموع دوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$)

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f_n'(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{n} = \frac{n - e^{-x}}{n}$

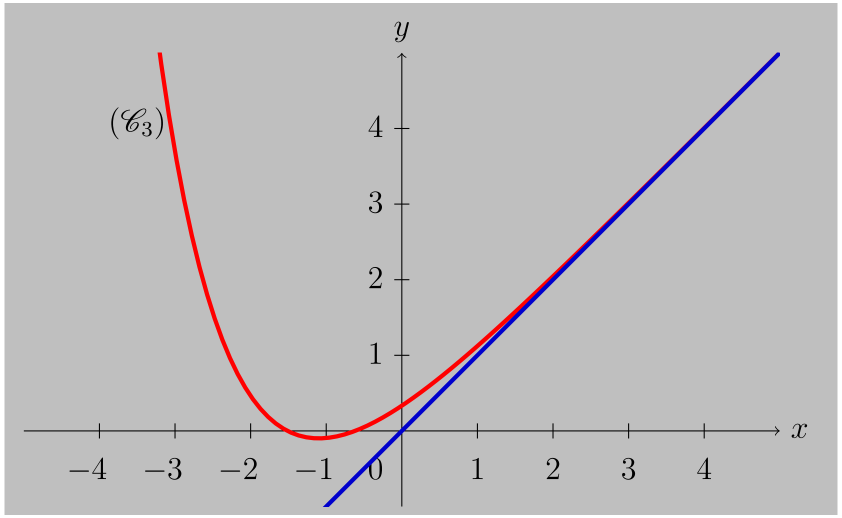
و منه فإن إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $n - e^{-x}$.

لدينا : $n - e^{-x} > 0 \iff n > e^{-x} \iff x > -\ln(n)$ و بالتالي f_n تزايدية قطعا على $[-\ln(n);+\infty[$ و تناقصية قطعا على $]-\infty;-\ln(n)]$.

جدول تغيرات الدالة f_n:

x	$-\infty$	$-\ln(n)$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$		$+$
$f_n(x)$	$+\infty$ ↘	$1 - \ln(n)$	↗ $+\infty$

❹ إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_3)$:



❺ أ) ليكن n عدد صحيح طبيعي حيث $n\geqslant 3$ لدينا :

$$\begin{aligned} n\geqslant 3 &\iff \frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{3} \iff \frac{e}{n}\leqslant\frac{e}{3} \\ &\Longrightarrow \frac{e}{n}\leqslant\ln(3) \qquad \left(\frac{e}{3}<1<\ln(3)\right) \\ &\Longrightarrow \frac{e}{n}<\ln(n) \qquad (\ln(3)\leqslant\ln(n)) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{طريقة ثانية:}}$ الدالة $u: x\longmapsto \ln(x)-\dfrac{e}{x}$ تزايدية قطعا على $[e;+\infty[$ إذن $n\geqslant e\Longrightarrow u(n)\geqslant u(e)=0$ و منه $\ln(n)>\dfrac{e}{n}$.

ب) ليكن n عدد صحيح طبيعي حيث $n\geqslant 3$. نبين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n حيث: $x_n\leqslant -\ln(n)$ و $-\dfrac{e}{n}\leqslant y_n\leqslant 0$.

◄ الدالة f_n متصلة و تناقصية قطعا على $]-\infty;-\ln(n)]$ إذن f_n تقابل من $]-\infty;-\ln(n)]$ نحو $f_n\big(]-\infty;-\ln(n)]\big)=]1-\ln(n);+\infty[$
و بما أن $0\in]1-\ln(n);+\infty[$ فإنه يوجد x_n وحيد من المجال $]-\infty;-\ln(n)]$ بحيث $f_n(x_n)=0$.

◄ الدالة f_n متصلة و تزايدية قطعا على $[-\ln(n);+\infty[$ إذن f_n تقابل من $[-\ln(n);+\infty[$ نحو $f_n\big([-\ln(n);+\infty[\big)=]1-\ln(n);+\infty[$
و بما أن $0\in]1-\ln(n);+\infty[$ فإنه يوجد y_n وحيد من المجال $[-\ln(n);+\infty[$ بحيث $f_n(y_n)=0$.

◄ لدينا $f_n(0)=\dfrac{1}{n}>0$ و $e<n\Leftrightarrow\dfrac{e}{n}<1\Rightarrow e^{\frac{e}{n}}<e$ و منه $f_n\left(-\dfrac{e}{n}\right)=\dfrac{e^{\frac{e}{n}}-e}{n}<0$ و بما أن f_n متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $\left[-\dfrac{e}{n};0\right]$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية فإن $-\dfrac{e}{n}\leqslant y_n\leqslant 0$.

ج) • لدينا $x_n\leqslant -\ln(n)$ و $\lim\limits_{n+\infty}-\ln(n)=-\infty$ إذن $\lim\limits_{n+\infty}x_n=-\infty$.

• لدينا $-\dfrac{e}{n}\leqslant y_n\leqslant 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{e}{n}=0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$.

❻ g معرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي:
$$\begin{cases} g(x)=-1-x\ln(x)\ ;\ x>0 \\ g(0)=-1 \end{cases}$$

أ) لدينا $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{n\to0^+}-1-x\ln(x)=-1=g(0)$
(لأن $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x)=0$) إذن g متصلة على اليمين في 0.

ب) ليكن n عدد صحيح طبيعي حيث $n\geqslant 3$
بما أن x_n حل للمعادلة $f_n(x)=0$ فإن

$$\begin{aligned} f_n(x_n)=0 &\iff x_n+\frac{e^{-x_n}}{n}=0 \\ &\iff -x_n=\frac{e^{-x_n}}{n} \\ &\iff \ln(-x_n)=-x_n-\ln(n) \\ &\iff \frac{\ln(-x_n)}{x_n}=-1-\frac{\ln(n)}{x_n} \qquad (x_n\leqslant-\ln(n)<0) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} g\left(\frac{-1}{x_n}\right) &= -1+\frac{1}{x_n}\ln\left(\frac{-1}{x_n}\right) \\ &= -1+\frac{1}{x_n}\ln\left((-x_n)^{-1}\right) \\ &= -1-\frac{\ln(-x_n)}{x_n} \\ &= -1+1+\frac{\ln(n)}{x_n} \\ &= \frac{\ln(n)}{x_n} \end{aligned}$$

ج) لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{x_n}=0$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=-\infty$ و g متصلة في 0 إذن

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{x_n}=g(0)=-1$$

التمرين الخامس

نعتبر الدالة F المعرفة على $[0;1]$ بما يلي:
$$\begin{cases} F(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+2x)}{2x^2}\ ;\ 0<x\leqslant1 \\ F(0)=1 \end{cases}$$

❶ ليكن x من $[0;1]$ لدينا:

$$\begin{aligned} 0\leqslant t\leqslant x &\iff 0\leqslant 2t\leqslant 2x \\ &\iff 1\leqslant 1+2t\leqslant 1+2x \\ &\iff \frac{1}{1+2x}\leqslant\frac{1}{1+2t}\leqslant 1 \end{aligned}$$

❷ ليكن x من $]0;1]$

أ) نبين أن: $F(x)=\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t$.

لدينا

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{2t+1-1}{1+2t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(1-\frac{1}{1+2t}\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{x^2}\left[t-\frac{\ln(1+2t)}{2}\right]_0^x\\
&= \frac{1}{x^2}\left(x-\frac{\ln(1+2x)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x^2}=F(x)
\end{aligned}$$

ب) ◄ نبين أن : $\dfrac{1}{1+2x}\leqslant F(x)\leqslant 1$

حسب السؤال ❶ لدينا $\dfrac{1}{1+2x}\leqslant\dfrac{1}{1+2t}\leqslant 1$ إذن

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+2x}\leqslant\frac{1}{1+2t}\leqslant 1 &\iff \frac{t}{1+2x}\leqslant\frac{t}{1+2t}\leqslant t\\
(x>0)\qquad &\Longrightarrow \int_0^x\frac{t}{1+2x}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x t\,\mathrm{d}t\\
&\Longrightarrow \frac{1}{1+2x}\int_0^x t\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x t\,\mathrm{d}t\\
&\Longrightarrow \frac{1}{1+2x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x\leqslant\int_0^x\frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t\leqslant\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x\\
&\Longrightarrow \frac{x^2}{2(1+2x)}\leqslant\int_0^x\frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{x^2}{2}\\
&\iff \frac{1}{1+2x}\leqslant\frac{2}{x^2}\int_0^x\frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t\leqslant 1\\
&\iff \frac{1}{1+2x}\leqslant F(x)\leqslant 1
\end{aligned}$$

◄ لدينا $\lim\limits_{x\to0^+}1=1=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1+2x}$ إذن $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=1=F(0)$

و بالتالي الدالة F متصلة على اليمين في 0 .

❸ ليكن x من $]0;1]$. نبين أن: $\displaystyle\int_0^x\frac{2t}{1+2t}\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\,\mathrm{d}t$.

نضع: $\begin{cases}u'(t)=2t\\ v(t)=\dfrac{1}{1+2t}\end{cases}$ إذن $\begin{cases}u(t)=t^2\\ v'(t)=\dfrac{-2}{(1+2t)^2}\end{cases}$ لدينا

$$\begin{aligned}
\int_0^x\frac{2t}{1+2t}\,\mathrm{d}t &= [u(t)v(t)]_0^x-\int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \left[\frac{t^2}{1+2t}\right]_0^x+\int_0^x\frac{2t^2}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

و بالتالي $\displaystyle\int_0^x\frac{2t}{1+2t}\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\,\mathrm{d}t\qquad(\clubsuit)$.

❹ ليكن x من $]0;1]$.

أ) نبين أن: $F'(x)=\dfrac{-4}{x^3}\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\,\mathrm{d}t$.

- الدالة $t\longmapsto\dfrac{t}{1+2t}$ متصلة على $[0;1]$ إذن الدالة $x\longmapsto\displaystyle\int_0^x\frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t$ قابلة للاشتقاق على $]0;1]$ و لدينا $\left(\displaystyle\int_0^x\frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t\right)'=\dfrac{x}{1+2x}$.
- الدالة $x\longmapsto\dfrac{2}{x^2}$ قابلة للاشتقاق على $]0;1]$ و لدينا $\left(\dfrac{2}{x^2}\right)'=\dfrac{-4}{x^3}$.

• الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0;1]$ (جداء دالتين قابلتين للاشتقاق)

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \left(\frac{2}{x^2}\right)'\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t+\frac{2}{x^2}\left(\int_0^x\frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t\right)'\\
&= \frac{-4}{x^3}\underbrace{\int_0^x\frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t}_{(\clubsuit)}+\frac{2}{x^2}\left(\frac{x}{1+2x}\right)\\
&= \frac{-4}{x^3}\underbrace{\left(\frac{x^2}{2(1+2x)}+\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t\right)}_{(\clubsuit)}+\frac{2}{x(1+2x)}\\
&= \frac{-2}{x(1+2x)}+\frac{-4}{x^3}\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t+\frac{2}{x(1+2x)}\\
&= \frac{-4}{x^3}\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

إذن $\quad F'(x)=\dfrac{-4}{x^3}\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t \quad : (\forall x\in]0;1])$.

ب) نبين أن : $\quad -\dfrac{4}{3}\leqslant F'(x)\leqslant\dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$.

حسب السؤال ❶ لدينا: $1\leqslant\dfrac{1}{1+2t}\leqslant\dfrac{1}{1+2x}$ إذن

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+2x}\leqslant\frac{1}{1+2t}\leqslant 1 &\iff \frac{t}{1+2x}\leqslant\frac{t}{1+2t}\leqslant t\\
&\iff \left(\frac{t}{1+2x}\right)^2\leqslant\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\leqslant t^2\\
&\Longrightarrow \int_0^x\frac{t^2}{(1+2x)^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t\\
&\Longrightarrow \frac{1}{(1+2x)^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x\leqslant\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t\leqslant\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x\\
&\Longrightarrow \frac{x^3}{3(1+2x)^2}\leqslant\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{x^3}{3}\\
&\Longrightarrow \frac{-4}{3}\leqslant\frac{-4}{x^3}\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{-4}{3(1+2x)^2}\\
&\iff \frac{-4}{3}\leqslant F'(x)\leqslant\frac{-4}{3(1+2x)^2}
\end{aligned}$$

و بالتالي $\quad -\dfrac{4}{3}\leqslant F'(x)\leqslant\dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$.

ج) حسب السؤال ❹ أ) الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0;1]$ و بالخصوص على المجال $]0;x]$ و متصلة على المجال $[0;x]$ (F متصلة على يمين 0 حسب ❷ ب)) إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد c من المجال $]0;x[$ بحيث $F'(c)=\dfrac{F(x)-F(0)}{x}$ و باستعمال السؤال السابق نحصل على $\dfrac{-4}{3(1+2c)^2}\leqslant\dfrac{F(x)-F(0)}{x}\leqslant\dfrac{-4}{3}$. $\qquad (1)$

من جهة أخرى لدينا

$$\begin{aligned}
0\leqslant c\leqslant x &\iff 1\leqslant 1+2c\leqslant 1+2x\\
&\iff 1\leqslant(1+2c)^2\leqslant(1+2x)^2\\
&\iff \frac{1}{(1+2x)^2}\leqslant\frac{1}{(1+2c)^2}\leqslant 1\\
&\iff \frac{-4}{3}\leqslant\frac{-4}{3(1+2c)^2}\leqslant\frac{-4}{3(1+2x)^2}
\end{aligned}$$

و باستعمال (1) نستنتج أن $\quad \dfrac{-4}{3}\leqslant\dfrac{F(x)-F(0)}{x}\leqslant\dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$.

د) لدينا $\quad \dfrac{-4}{3}\leqslant\dfrac{F(x)-F(0)}{x}\leqslant\dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

و $\quad \displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{-4}{3(1+2x)^2}=\frac{-4}{3}$

إذن $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\frac{-4}{3}$ و منه الدالة F قابلة للاشتقاق على يمين 0 و العدد المشتق على يمين 0 هو $F'_d(0)=\dfrac{-4}{3}$.