Dipôle RL

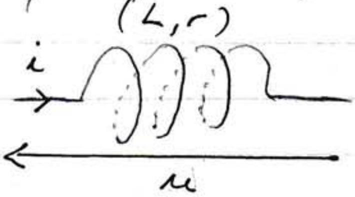
1/ La tension aux bornes d'une bobine.

Une bobine est constituée d'un enroulement de fil conducteur, sur un cylindre

Henry (H) (Ω)

$$(N) \rightarrow u = L\frac{di}{dt} + ri \rightarrow (A)$$

(L, r)



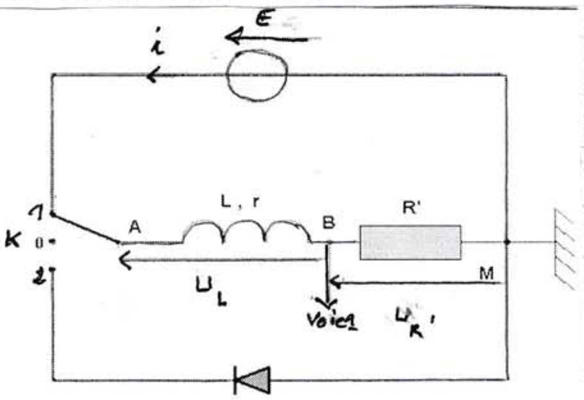
L : inductance de la bobine

r : la résistance de la bobine

- En régime permanent ($i = c^{te}$ $\frac{di}{dt} = 0$), la bobine se comporte comme un conducteur ohmique de résistance r. $u = ri$
- Dans le cas d'une bobine idéale ($r = 0$) $u = L\frac{di}{dt}$

2/ Etablissement du courant dans une bobine

2-1- Réponse à un échelon de tension :



A $t = 0$ on ferme l'interrupteur (K).

La loi d'additivité des tension :

$$E = u_{R'} + u_L$$
$$= R'i + L\frac{di}{dt} + ri$$
$$E = (R'+r)i + L\frac{di}{dt}$$

On pose $R' + r = R$

$$\boxed{E = Ri + L\frac{di}{dt}}$$

Equation différentielle du premier ordre qui admet une solution du type

$i(t) = Ae^{-mt} + B$. A, B et m des constantes.

$\frac{di}{dt} = -mAe^{-mt}$ on remplace dans l'equation différentielle

$$E = RAe^{-mt} + RB - LmAe^{-mt} \Rightarrow E = Ae^{-mt}\left[R - mL\right] + RB$$

La validité de cette expression quel que soit t donne :

$$\begin{cases} R - mL = 0 \\ RB = E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = R/L \\ B = E/R \end{cases}$$

on pose $\boxed{\tau = L/R}$ (s)

La constante de temps d'etablissement du courant

à $t = 0$ $i = 0$ $\Rightarrow A = -B = -E/R$

d'où :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

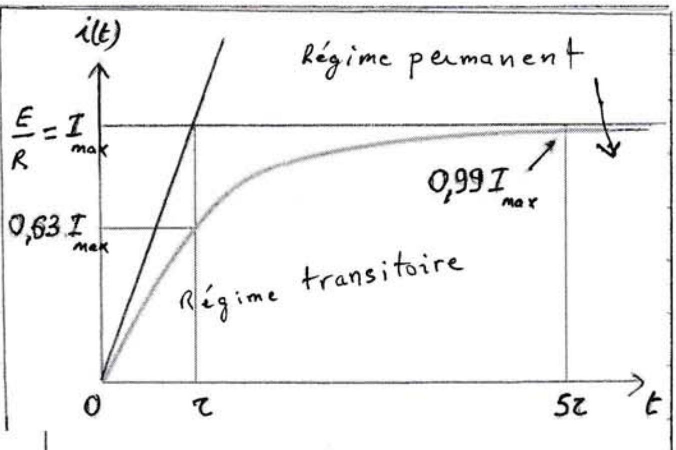
- La tension $u_L = L\frac{di}{dt} + ri \Rightarrow u_L = \frac{E}{R}\cdot\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} + r\frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

$$\boxed{u_L(t) = E\left(1 - \frac{r}{R}\right)e^{-t/\tau} + r\frac{E}{R}}$$

$u_L(0) = E$ $u_L(0^-) = 0$

$u_L(\infty) = r\frac{E}{R}$

2-2) Représentation de la courbe $i(t)$



on a : $i(0) = 0$

$i(\infty) = \frac{E}{R} = i_{max}$

Le courant augmente progressivement jusqu'à atteindre une valeur maximale et reste constant.

La bobine s'oppose à l'établissement du courant dans le circuit.

Détermination de la constante de temps τ :

- Graphiquement on trace la tangente à l'origine ($t=0$) et l'asymptote horizontale. L'abscisse du point d'intersection donne la valeur τ.

$$\left[\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{E}{L} = \frac{E}{R} \cdot \frac{R}{L} = \frac{i_{max}}{\tau}\right]$$

- $t = \tau$ $\quad i(\tau) = 0{,}63 \frac{E}{R} = 0{,}63\, i_{max}$

- $t = 5\tau$ $\quad i(5\tau) = 0{,}99 \frac{E}{R} = 0{,}99\, i_{max}$ Le régime permanent est atteint.

3°/ Rupture du courant dans le circuit

Après établissement du courant $\left(i_{max} = \frac{E}{R}\right)$

on bascule l'interrupteur (K) sur la position (2) $\left(\text{à } t=0 \quad i(0) = \frac{E}{R}\right)$

D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_{R'} + u_L = 0 \Rightarrow R'i + ri + L\frac{di}{dt} = 0 \qquad \text{on pose } R = R' + r$$

$$\boxed{L\frac{di}{dt} + Ri = 0}$$

solution : $\quad i(t) = Ae^{-mt} \qquad \frac{di}{dt} = -mAe^{-mt}$

$$-mLAe^{-mt} + RAe^{-mt} = 0 \Rightarrow Ae^{-mt}\left[R - mL\right] = 0$$

$m = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau}$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}}$$

$i(0) = A = \frac{E}{R}$

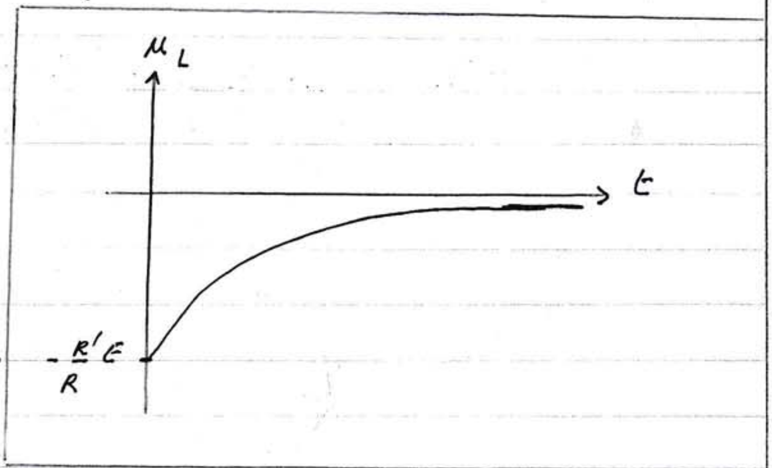
$i(\infty) = 0$

* Expression de la tension aux bornes de la bobine :

$$u_L = L\frac{di}{dt} + ri = -\cancel{L} \cdot \frac{E}{\cancel{R}} \cdot \frac{\cancel{R}}{\cancel{L}} e^{-t/\tau} + \frac{r}{R} E e^{-t/\tau} \qquad (R = R' + r)$$

$$u_L = Ee^{-t/\tau}\left(\frac{r}{R} - 1\right) \Rightarrow \boxed{u_L = -\frac{R'}{R} E e^{-t/\tau}}$$

on remarque que $u_L(0) = -\frac{R'}{R}E < 0$



La bobine se comporte comme générateur de f.e.m $-\frac{R'}{R}E$.

$u_L(\infty) = 0$.

4°/ Energie emmagasinée dans une bobine.

soit une bobine idéale d'inductance L. traversée par un courant i.

La puissance est : $P = u.i = L\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L i^2\right)$ (1)

on sait que : $P = \frac{dE_m}{dt}$ (2)

De (1) et (2) on en déduit l'énergie magnétique de la bobine

$$\text{(J)} \quad \boxed{E_m = \frac{1}{2} L i^2} \quad \text{(A)} \quad \text{(H)}$$

L'energie ne peut pas varier brusquement, par conséquent l'intensité du courant dans une bobine est une fonction continue du temps (il y a discontinuité de la tension).

EXERCICE

1-Etude du dipôle RL

On réalise le montage, représenté dans la figure 1, comportant :

-un générateur de f.e.m $E = 12\,V$ et de résistance interne négligeable ;

-un conducteur ohmique de résistance $R_1 = 52\,\Omega$;

-une bobine (b) d'inductance L et de résistance r ;

-un interrupteur K .

On ferme l'interrupteur K à l'instant de date t=0 .Un système d'acquisition informatisé adéquat permet de tracer la courbe représentant la tension $u_{R_1}(t)$ aux bornes du conducteur ohmique (fig.2) .(La droite (T) représente la tangente à la courbe à t=0).

1.1-Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de u_{R_1}.

1.2- Déterminer la valeur de la résistance r de la bobine.

1.3- Vérifier que L=0,6 H .

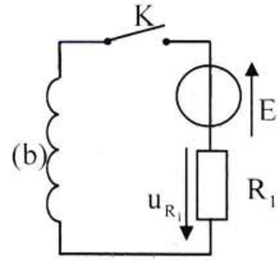


Figure 1

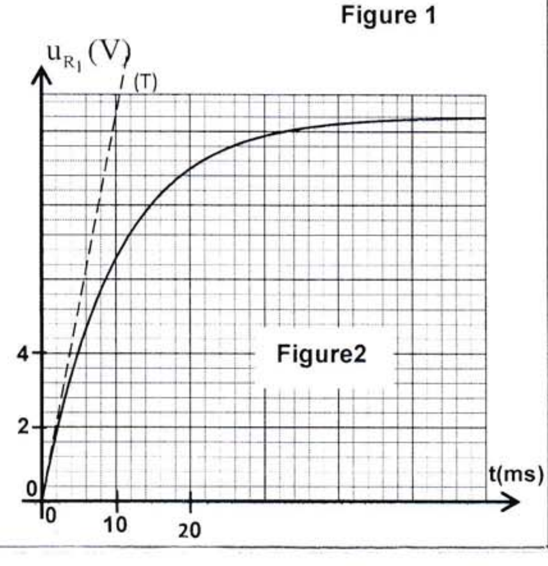


Figure2