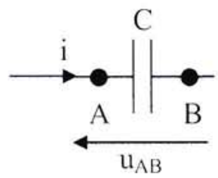
# BILAN EN ELECTRICITE : RC, RL ET RLC

## I. INTENSITE :

$i = \dfrac{dq}{dt}$ en courant variable $\qquad\qquad$ $I = \dfrac{Q}{\Delta t}$ en courant continu

Méthode générale d'établissement des équations différentielles : loi d'additivité des tensions puis relations caractéristiques : $i = \dfrac{dq}{dt}$, loi d'Ohm $u_R = R \times i$ aux bornes de la résistance, loi du condensateur, loi de la bobine.

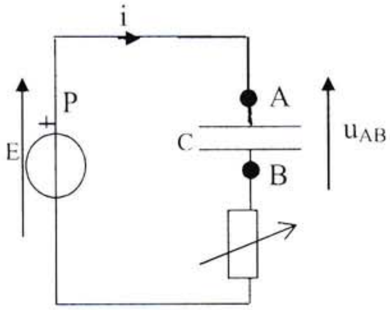
## II. LE DIPOLE RC :




$q_A = C \times u_{AB}$ C en farads (F), $q_A$ en coulombs (C), $u_{AB}$ en volts (V)

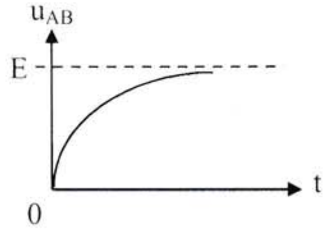
### ① Charge d'un condensateur :

Conditions initiales : à t = 0 s, $u_{AB,o} = 0$ V.



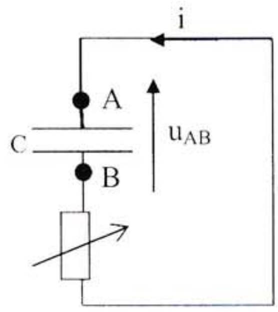

Expression de l'équation différentielle en $u_{AB}$ : $RC \times \dfrac{du_{AB}}{dt} + u_{AB} = E$

Solution : $u_{AB}(t) = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}\times t}\right)$



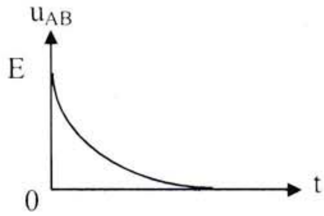

### ② Décharge d'un condensateur :

Conditions initiales : à t = 0s, $u_{AB,o} = E$.




Expression de l'équation différentielle en $u_{AB}$ : $RC \times \dfrac{du_{AB}}{dt} + u_{AB} = 0$

Solution : $u_{AB}(t) = E.e^{-\frac{1}{RC}\times t}$




### ③ Constante de temps du dipôle RC :

$\tau = R \times C$ avec $\tau$ en secondes (s) si R en ohms ($\Omega$) et C en farads (F).

**Détermination** : – avec la formule.

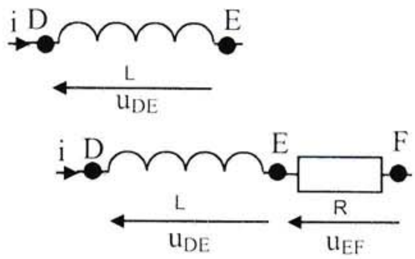
– méthode de la tangente à l'origine.

– lorsque $t = \tau$ on a $u_{AB} = 0{,}63 \times E$ en charge ou $u_{AB} = 0{,}37 \times E$ en décharge.

### ④ Energie stockée dans un condensateur :

$$E_{cond} = \frac{1}{2} C \times u_{AB}^{\ 2}$$ en joules (J) si C en F et $u_{AB}$ en V

## III. LE DIPOLE RL :

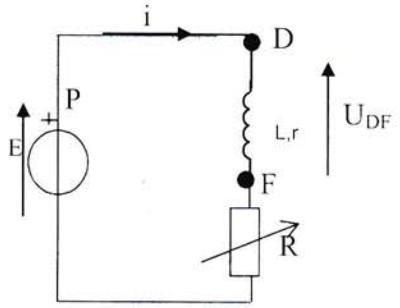



Pour une bobine idéale : $u_{DE} = L \times \dfrac{di}{dt}$ avec L en henrys (H)

Pour une bobine réelle : $u_{DF} = u_{DE} + u_{EF} = L \times \dfrac{di}{dt} + r \times i$

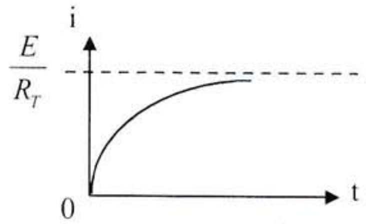
### ① Etablissement du courant dans une bobine :

Conditions initiales : à t = 0 s, $i_o = 0$ A.




Expression de l'équation différentielle en i : $L \times \dfrac{di}{dt} + R_T \times i = E$

Solution : $i(t) = \dfrac{E}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{R_T}{L}\times t}\right)$ avec $R_T = R + r$




NB : Pour la rupture, $i(t) = \dfrac{E}{R_T} e^{-\frac{R_T}{L}\times t}$.

### ② Constante de temps du dipôle RL :

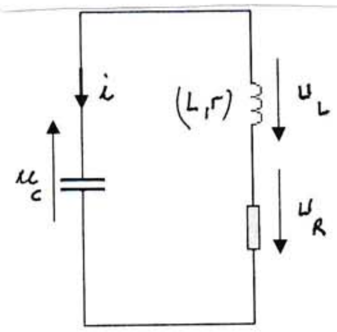
$\tau = \dfrac{L}{R_T}$ τ en secondes (s) si L en H et $R_T$ en Ω

**Détermination** :
- avec la formule.
- méthode de la tangente à l'origine.
- lorsque t = τ on a $i = 0{,}63 \times I_{max}$ avec $I_{max} = \dfrac{E}{R_T}$.

### ③ Energie emmagasinée dans une bobine :

$$E_{bob} = \frac{1}{2} L \times i^2$$ en joules (J) si L en H et I en ampères (A)

## IV Etudie théorique du circuit R,L,C.




### *1. Equation différentielle du circuit oscillant RLC.*

La loi des tensions s'écrit : $u_R + u_L + u_C = 0$
Exprimons ces différentes tensions :

$u_L = L\dfrac{di}{dt} + r.i$ $u_R = R.i$ $u_C = q_A / C$

**Equation différentielle en fonction de uc :**

Portons ces valeurs dans l'équation : $L\dfrac{di}{dt} + r.i + R.i + uc = 0$

Or $i = \dfrac{dqa}{dt} = C.\dfrac{duc}{dt}$ on a donc : $C.L.\dfrac{d^2uc}{dt} + (r+R).C.\dfrac{duc}{dt} + uc = 0$

Finalement :

$$\boxed{\frac{d^2uc}{dt} + \frac{(R+r)}{L}\frac{duc}{dt} + \frac{1}{LC}uc = 0}$$

2/4

Equation différentielle du second ordre, à coefficients constants avec seconde membre.

**Equation différentielle en fonction de q :**

Avec $u_C = q_A / C$ on a : $L.\frac{d^2q}{dt} + (r+R).\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

Finalement : $$\boxed{\frac{d^2q}{dt} + \frac{(R+r)}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

### *2. Cas du circuit idéal sans amortissement.*

C'est le cas d'un circuit C,L ou il n' y a pas de résistance (cas idéal mais irréel)

Dans un circuit comportant des oscillations libres non amorties, la charge du condensateur obéit à l'équation différentielle : $\frac{d^2q}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$ ou $\left(\ddot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0\right)$

**!** On trouve l'écriture : $\ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0$

La solution de l'équation différentielle est : $\boxed{q(t) = qm.\cos\left(\frac{2.\pi}{To}.t + \phi\right)}$ ou $u_C(t) = u_{C\,max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

*qm est la charge maximale de l'armature B.*

*$\phi$ est la phase ( permet de décaler la courbe)*

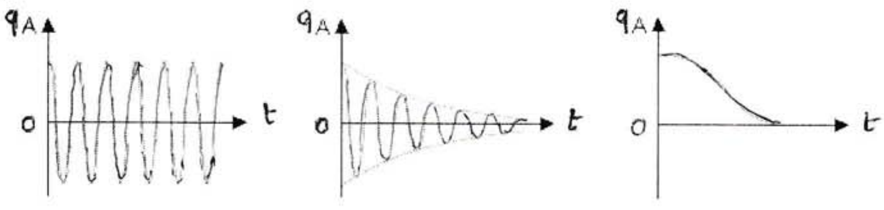
*Ces 2 constantes se déterminent à partir de deux données, en général les valeurs de $q_B$ et i à l'instant initial.*

On vérifie que q(t) est solution ; on trouve : $\frac{d^2q}{dt} + \frac{4.\pi^2}{To^2}q = 0$

avec $\frac{4.\pi^2}{To^2} = \frac{1}{LC}$ avec To la pseudo-période soit : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

Rappel : la période est liée à la fréquence par : f =1/T et la longueur d'onde $\lambda = c \times T$

**Conclusion :**

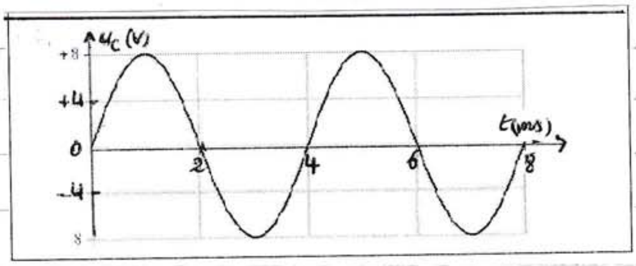



| Résistance nulle | Résistance faible | Résistance importante |
|---|---|---|
| Régime périodique | Régime pseudo-périodique | Régime apériodique |
| $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ | $T_1$ voisin de $T_0$ | |

Exercice : on donne la courbe $u_C = f(t)$

Déterminer à partir du graphe :

- L'Amplitude et la période des oscillations
- La phase à l'origine $\varphi$.




Réponses : on a $u_C(t) = U_{C\,max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

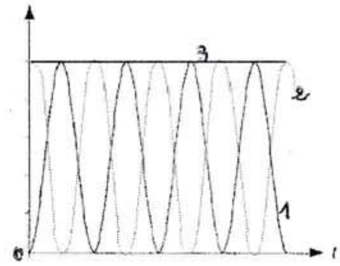
- $U_{C\,max} = 8$ V $T_0 = 4$ ms
- à $t=0$ $u_C = 0$ $\Rightarrow$ $\cos(\varphi) = 0$ $\Rightarrow$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\dot{u}_C(0) = -\frac{2\pi}{T_0}U_{C\,max}\sin(\varphi) > 0$ (Au début la fonction $u_C(t)$ est croissante)

$\Rightarrow \sin(\varphi) < 0$ $\Rightarrow$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

## VI. Etude énergétique du circuit.

### 1. Comment varie l'énergie dans un circuit R,L,C ?




Dans le cas d'un régime période ( pas de perte d'énergie), les 2 énergies sont en opposition de phase ( lorsque $E_{bobine}$ augmente, $E_{condo}$ diminue et inversement.

**Etude théorique du circuit sans amortissement.**

Calcul de l'énergie du condensateur :

$E_{cond}=\frac{1}{2}C.u^2$ et $u(t) = E.\cos(\frac{2.\pi}{To}.t+\phi)$ prenons $\phi = 0$ d'où $E_{cond} = \frac{1}{2}C\,E^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

Calcul de l'énergie dans la bobine :

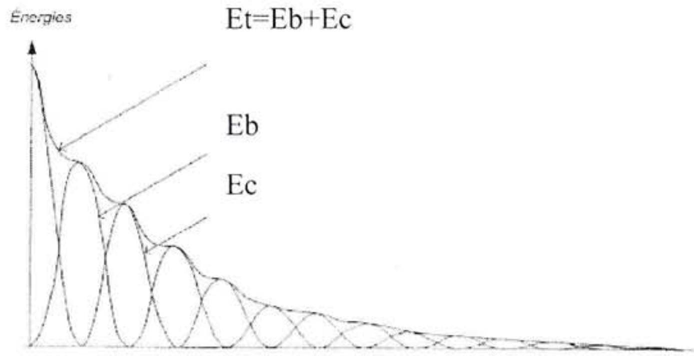
$$i = \frac{Cdu(t)}{dt} = CE.\frac{2.\pi}{To}.\sin(\frac{2.\pi}{To}.t+\phi)$$

$$E_{bobine} = \frac{1}{2}L\,i^2 = \frac{1}{2}L\,C^2\,E^2\frac{4\pi^2}{T_0^2}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) = \frac{1}{2}C\,E^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) \text{ car } T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

L'énergie totale dans le circuit est donc :

$$E_{tot} = E_{cond} + E_{bobine} = \frac{1}{2}C\,E^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + \frac{1}{2}C\,E^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) \Leftrightarrow \boxed{E_{tot} = \frac{1}{2}C\,E^2}$$

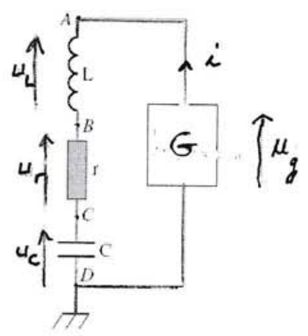
**Etude expérimentale :** ( circuit avec amortissement)




Dans le cas d'un régime pseudo-périodique, l'énergie totale diminue du fait du transfert thermique d'énergie par effet Joule.

### 2. Comment obtenir des oscillations électriques non amorties ?

- *Savoir que le dispositif qui entretient les oscillations fournit l'énergie évacuée par transfert thermique.*




La résistance est responsable de l'amortissement des oscillations ; elle consomme de l'énergie sous forme d'effet joule. Pour que les oscillations persistent, il faut compenser cette perte d'énergie dans la résistance en apportant au même rythme qu'elle est consommée l'énergie.

On a : $u_C+u_r+u_L = u_g$

Le circuit Lc sans amortissement est tel que $u_C+u_L=0$

d'où $u_g = u_r = r\,i$

sachant qu'on a utilisé une convention générateur.

Le générateur G se comporte comme une résistance négative $-r$.