2006 Afrique	EXERCICE II : PRINCIPE D'UNE MINUTERIE (5,5 points) CORRECTION

Lycée Lyautey (I.Akdime & M.Moppert) & http://labolycee.org ©

1. ÉTUDE THÉORIQUE D'UN DIPÔLE RC SOUMIS À UN ÉCHELON DE TENSION.

1.1. flèches tension ci-contre

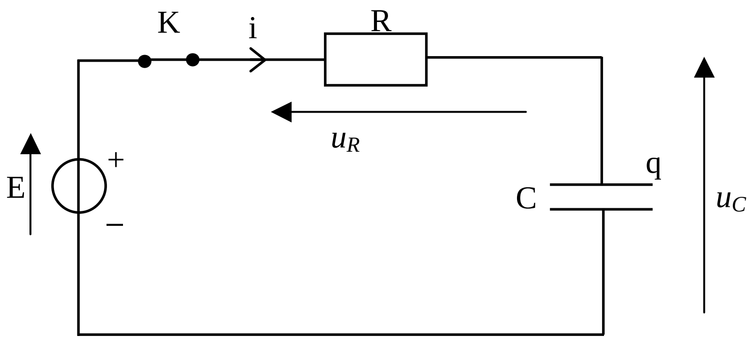


Figure 1

1.2. $u_R = R.i$

1.3. $i = \dfrac{dq}{dt}$

1.4. $q = C.u_C$

1.5. $i = \dfrac{dC.u_C}{dt}$, C étant constant il vient

$i = C.\dfrac{du_C}{dt}$

1.6. D'après la loi d'additivité des tensions :

$E = u_R + u_C$

1.7. $E = R.i + u_C$

$E = R.C.\dfrac{du_C}{dt} + u_C$

avec $\tau = R.C$, on obtient l'équation différentielle à laquelle obéit u_C : $E = \tau.\dfrac{du_C}{dt} + u_C$ (1)

1.8.1. $u_C = E\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ ou $u_C = E - E.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

donc $\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

Reportons ces expressions dans l'équation différentielle (1)

$E = \tau.\dfrac{du_C}{dt} + u_C$

$E = \tau.\dfrac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + E - E.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

$E = E.\,e^{-\frac{t}{\tau}} + E - E.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ Cette égalité est vraie, donc la solution proposée est satisfaisante.

1.8.2. La condition initiale est $u_C = 0$, le condensateur n'étant pas chargé initialement.

$u_C = E\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

$u_C\,(0) = E(1 - e^{-\frac{0}{\tau}}) = 0$

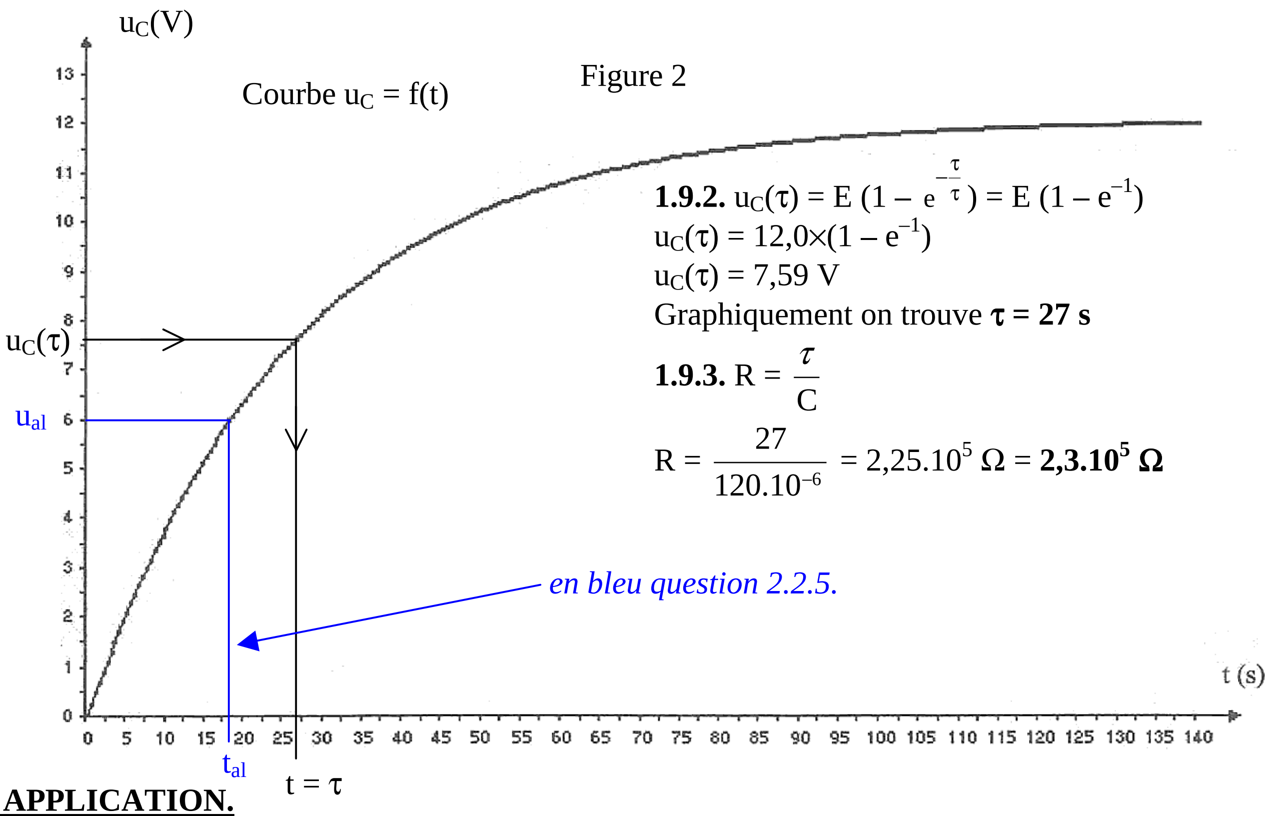
1.9.1. D'après 1.2. $R = \dfrac{u_R}{i}$ donc $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$

D'après 1.5. $C = i\,.\,\dfrac{dt}{du_C}$ donc $[C] = [I].\dfrac{[T]}{[U]}$

$[RC] = [R].[C]$

$[RC] = \dfrac{[U]}{[I]}.[I].\dfrac{[T]}{[U]}$

$[RC] = [T]$ le produit RC est homogène à une durée.



1.9.2. $u_C(\tau) = E\,(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}) = E\,(1 - e^{-1})$

$u_C(\tau) = 12{,}0 \times (1 - e^{-1})$

$u_C(\tau) = 7{,}59$ V

Graphiquement on trouve **τ = 27 s**

1.9.3. $R = \dfrac{\tau}{C}$

$R = \dfrac{27}{120.10^{-6}} = 2{,}25.10^{5}\ \Omega = \mathbf{2{,}3.10^{5}\ \Omega}$

2. APPLICATION.

2.1. Pendant la phase de contact, la tension aux bornes du condensateur devient instantanément nulle. La tension u_C devient inférieure à u_{al} alors la lampe s'allume.

2.2.1. Lorsqu'on relâche le bouton poussoir, le condensateur se charge : u_C augmente exponentiellement de 0 V à 12 V (E).

2.2.2. La charge du condensateur n'étant pas instantanée, la lampe reste allumée pendant une certaine durée puis s'éteint dès que la tension u_C atteint la valeur u_{al}.

2.2.3. à la date $t = t_{al}$, on a $u_C = u_{al}$

$$E\,(1 - e^{-\frac{t_{al}}{\tau}}) = u_{al}$$

$$1 - e^{-\frac{t_{al}}{\tau}} = \frac{u_{al}}{E}$$

$$1 - \frac{u_{al}}{E} = e^{-\frac{t_{al}}{\tau}}$$

$$\ln\left(1 - \frac{u_{al}}{E}\right) = -\frac{t_{al}}{\tau}$$

$$\ln\left(\frac{E - u_{al}}{E}\right) = -\frac{t_{al}}{\tau}$$

$$\frac{t_{al}}{\tau} = -\ln\left(\frac{E - u_{al}}{E}\right) \qquad -\ln\frac{a}{b} = \ln\frac{b}{a}$$

$$\frac{t_{al}}{\tau} = \ln\left(\frac{E}{E - u_{al}}\right)$$

$$t_{al} = \tau.\ln\left(\frac{E}{E - u_{al}}\right)$$

2.2.4. $t_{al} = 25\ln\dfrac{12}{12 - 6{,}0} = 17$ s

2.2.5. Voir graphique ci-dessus. Le point d'ordonnée $u_{al} = 6{,}0$ V a pour abscisse t = 18 s. Ce résultat est en cohérence avec le calcul précédent.

2.3. Pour augmenter la durée d'allumage, il faut augmenter la valeur de la constante de temps.
Or : τ = R.C. Il faut donc augmenter R ou/et C.