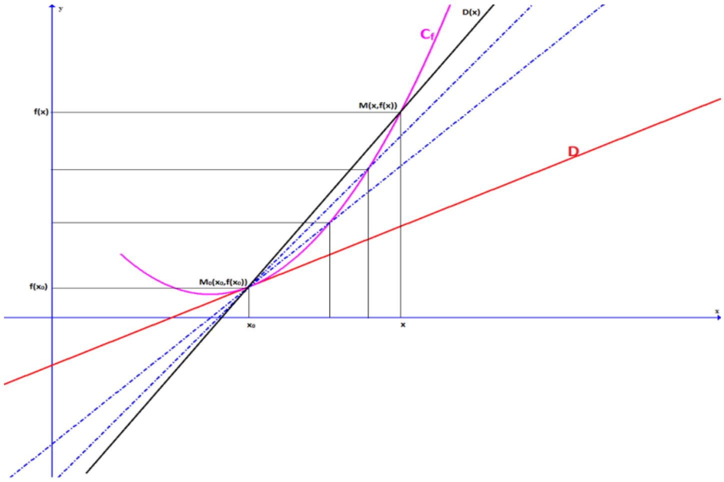
DERIVATION

I- Le nombre dérivé et son interprétation géométrique

Soit f une fonction numérique réelle définie sur un intervalle contenant x_0 et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère

On pose $T(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *pour* $x_0 \neq 0$

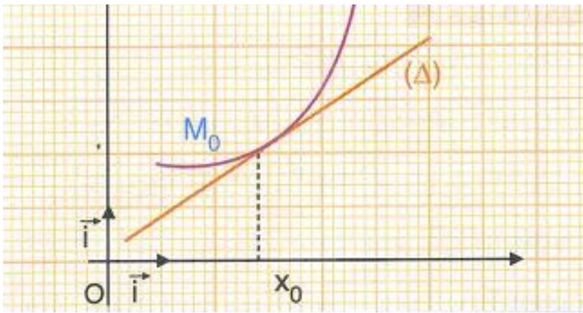


1er cas

$$\lim_{x \to x_0} T(x) = l$$

(C) Admet une tangente (Δ) au point $M_0(x_0,f(x_0))$ d'équation:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

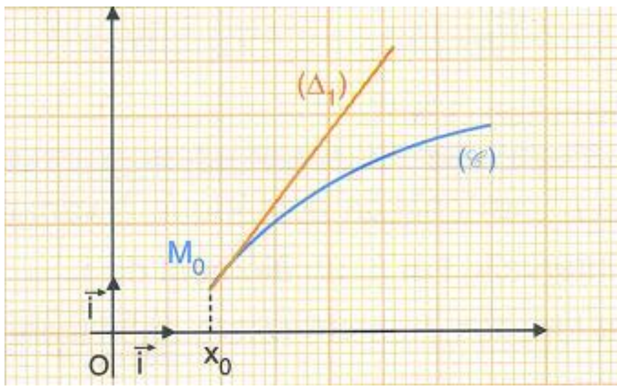


2me cas

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} T(x) = l$$

l est le nombre dérivé à droite de la fonction f en x_0

On note f_d'(x_0)=l

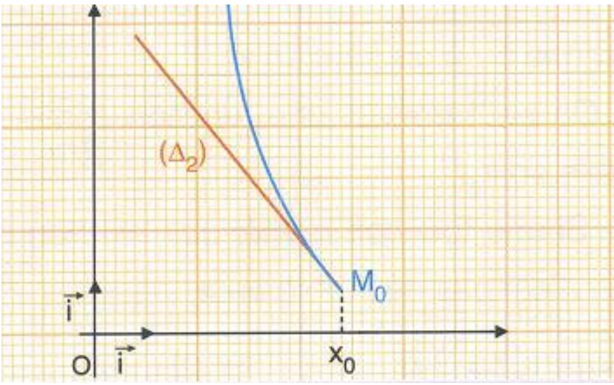


(C) Admet une demi tangente (Δ) au point $M_0(x_0,f(x_0))$ d'équation:

$$\begin{cases} x > x_0 \\ y = f_d'(x_0)(x - x_0) + f'(x_0) \end{cases}$$

3^me cas

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} T(x) = l$$



l est le nombre dérivé à gauche de la fonction f en x_0

On note $f_g'(x_0)=l$

(C) Admet une demi tangente (Δ) au point $M_0(x_0, f(x_0))$ d'équation:

$$\begin{cases} x < x_0 \\ Y = f_g'(x_0)(x - x_0) + f'(x_0) \end{cases}$$

II- Approximation locale d'une fonction dérivable en un point par une fonction affine

a) définition

Soit f une fonction numérique réelle définie sur un intervalle I contenant x_0

La fonction $\boldsymbol{x \to f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

est appelée l'approximation locale affine de f au voisinage de x_0

Le nombre $\boldsymbol{f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ *est une valeur approchée de f(x) au voisinage de x_0*

b) Ecriture différentielle

Soit f une fonction numérique réelle définie sur un intervalle I contenant x_0

Au voisinage de x_0, on a : $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

En posant $\Delta(x) = x - x_0$ *et* $\Delta(y) = y - y_0$

On obtient : $\Delta(y) \approx f'(x_0)\Delta(x)$ *ce qui donne l'écriture* $d(y) = f'(x_0)d(x)$

Qui est appelée l'écriture différentielle

On note: $\dfrac{df}{dx} = f'(x_0)$

III-Dérivabilité et continuité

a) Théorème

Soit f une fonction numérique réelle définie sur un intervalle I contenant x_0

Si f est dérivable en x_0 *alors f est continue en* x_0

b) Remarques

- *Le théorème reste valable à gauche et à droite de* x_0
- *La réciproque du théorème n'est pas vraie c'est-à-dire qu'une fonction peut être continue en* x_0 *sans qu'elle soit dérivable en* x_0,
- *Mais si une fonction n'est pas continue en* x_0 *alors elle n'est pas dérivable en* x_0

c)Exemple

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x\sin\frac{1}{x} \ \ pour\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Montrer que f est continue en 0 et non dérivable en0

d) Théorème

Soit f une fonction numérique réelle dérivable sur un intervalle I alors elle est continue sur cet intervalle I

IV-Dérivée de la composée de deux fonctions

a) Théorème

Soient f et g deux fonctions numériques réelles définies respectivement I et J tels que $f(I) \subset J$

Si f est dérivable en x_0 *et g dérivable en* $f(x_0)$, *alors gof est dérivable en* x_0 *et on a:*

$$(gof)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$$

b) Exemples

Ex1

V-Dérivée de la fonction réciproque

a) Théorème

Soit f une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J et f^{-1} sa réciproque,

Si f est dérivable en x_0 de I et $f'(x_0) \neq 0$,alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a:

$$(f^{-1})'\big(f(x_0)\big) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

En posant $y_0 = f(x_0)$ la formule précédente devient :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}$$

b) exemple

Déterminer la dérivée de la réciproque de tan(x) dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

VI- Dérivée de la fonction racine n^ièmé

a) Théorème

Soit n un nombre entier naturel non nul.

La fonction $f: x \to \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

b) Exemple

Si f(x)=$\sqrt[3]{x}$ alors $\forall x \in]0, +\infty[$ f''(x)=$\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

c) Conséquence

Soit r un nombre rationnel non nul.

1- *La fonction $h: x \to x^r$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout x de $]0, +\infty[$:*

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

2- *Si la fonction u est strictement positive et dérivable sur un intervalle I, Alors u^r est dérivable sur I et on a*

$$\forall x \in I:\ (u^r)'(x) = ru'(x)u^{r-1}(x)$$

d) Exemple

Si f(x)=$\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}$ *alors* $\forall x \in R$

f'’(x)$=\frac{1}{3}(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)'(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)^{\frac{1}{3}-1}$

$=\frac{1}{3}(3x^2 - 4x + 3)(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)^{-\frac{2}{3}}$

$=\frac{(3x^2-4x+3)}{3\sqrt[3]{(x^3-2x^2+3x-1)^2}}$