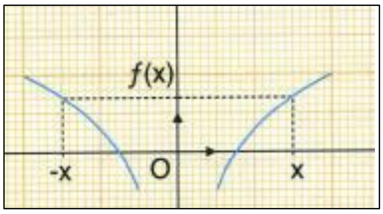
ETUDE DES FONCTIONS

Soit f une fonction numérique réelle définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

I- Eléments de symétrie d'une courbe.

1. Fonction paire.



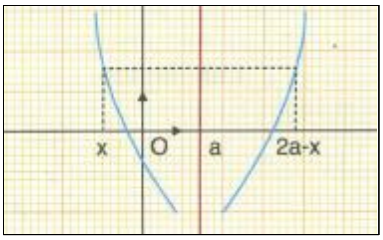
f est une fonction paire si et seulement si :

$$\forall x \in D \quad -x \in D \text{ et } f(-x) = f(x)$$

La courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

exemple : la fonction $x \to x^2$

2. Axe de symétrie



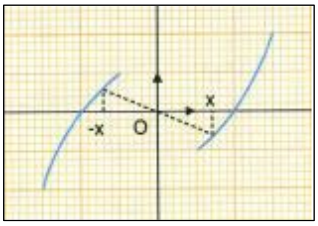
La droite d'équation $(x=a)$ est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si :

$$\forall x \in D \quad 2a - x \in D \text{ et } f(2a-x) = f(x)$$

exemple: $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Montrer que (C_f) admet la droite d'équation $(x=1)$ comme axe de symétrie.

3. Fonction impaire.



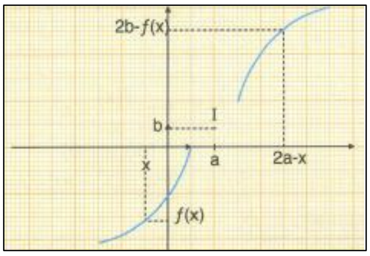
f est une fonction impaire si et seulement si :

$$\forall x \in D \quad -x \in D \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

La courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'origine du repère.

exemple : la fonction $x \to \frac{1}{x}$

4. Centre de symétrie



(C_f) admet le point $\Omega(a, b)$ pour centre de symétrie si et seulement si :

$$\forall x \in D \quad 2a - x \in D \text{ et } f(2a-x) = 2b - f(x)$$

exemple: $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet le point $\Omega(2,1)$ pour centre de symétrie.

II-Fonction périodique

1) Définition

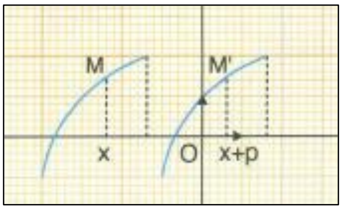
La fonction f est périodique de période p $(p > 0)$ si et seulement si :

$$\forall x \in D \; ; \; (x+p) \in D \text{ } et \text{ } (x-p) \in D \text{ } et \text{ } f(x+p) = f(x)$$

Exemple : les fonctions sin et cos sont périodique de période 2π.

La fonction $tangente$ est périodique de périodeπ.

2) La courbe d'une fonction périodique.



La courbe $(\mathcal{C}_f)$ se déduit de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ de f sur un intervalle de longueur p, par des translations $t_{k\vec{u}}$ où $\vec{u}(p,0)$ $avec$ $k \in \mathbb{Z}$

III- Branches infinies

Définition

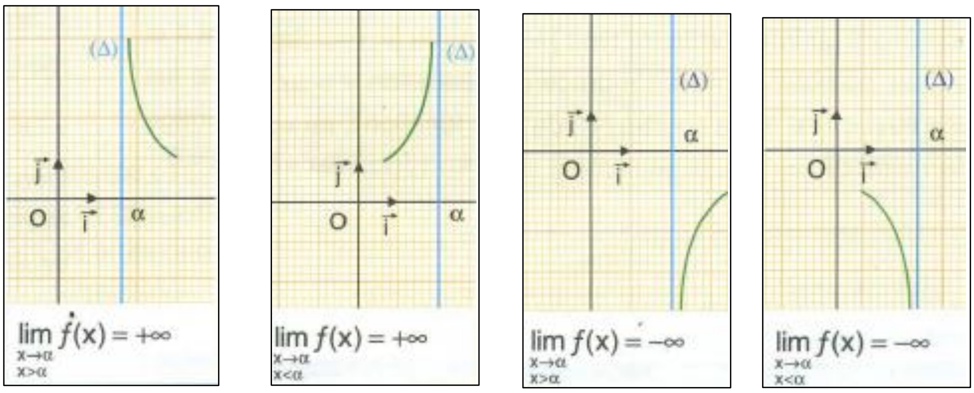
On dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche infinie dès que l'une des coordonnées d'un point de $(\mathcal{C}_f)$ peut tendre vers l'infini.

a- Cas des asymptotes

a) Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

Définition

La droite D d'équation : $(x = a)$ est une asymptote (verticale) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si f admet une limite infinie à gauche ou à droite de a.

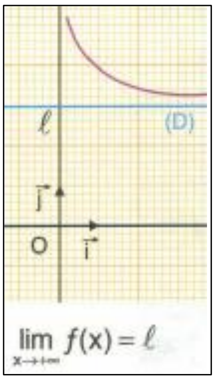


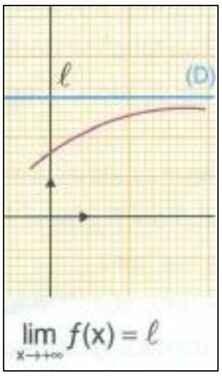
Exemple : $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ Montrer que La droite D d'équation : $(x = 2)$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$

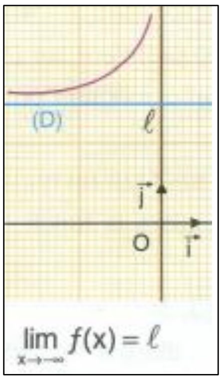
b) Asymptote parallèle à l'axe des abscisses

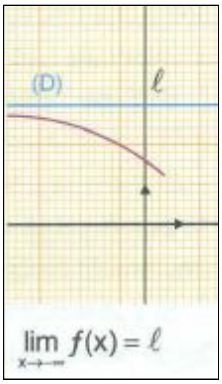
Définition

La droite D d'équation : $(y = b)$ est une asymptote (horizontale) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si la limite de f en -∞ ou +∞ est égale à b









<u>Exemple :</u> $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ Montrer que La droite D d'équation : $(y = 3)$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

c) Asymptote non parallèle aux axes des ordonnées

Définition

La droite D d'équation : $(y = ax + b)$ est une asymptote (oblique) à $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si

La limite de $(f(x) - (ax + b))$ à l'infinie est nulle.

<u>Exemple</u> : $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x}$

Montrer que la droite D d'équation : $(y = 2x - 1)$ est une asymptote (oblique) à $(\mathcal{C}_f)$

d) Théorème :

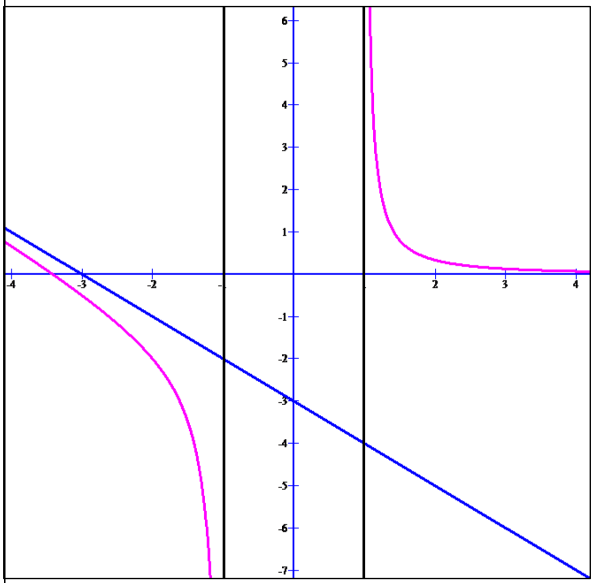
La droite D d'équation : $(y = ax + b)$ est une asymptote (oblique) à $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si :

$$\lim_{\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad avec\ a \in \mathbb{R}^* \quad et \quad \lim_{\infty}(f(x) - ax) = b$$

Exemple : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique.

Exercice:



La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur$]-\infty\,,-1[\cup]1\,,+\infty[$.

Les droites

$x=-1,\ x=1,\ y=0\ et\ y=-x-3$ sont des asymptotes à cette courbe. Déterminons graphiquement sur les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)\ \ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\,;\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x+3)\,;\ \lim_{x\to-1^-} f(x)\ et\ \lim_{x\to1^+} f(x)$$

b- Branches paraboliques

f est une fonction numérique réelle telle que $\lim\limits_{\infty} f=\infty$

Alors la branche infinie de (C_f) dépend de $\lim\limits_{\infty}\frac{f(x)}{x}$

e) Si $\lim\limits_{\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

Exemple : $f(x)=x^2$

On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=+\infty\quad et\quad \lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

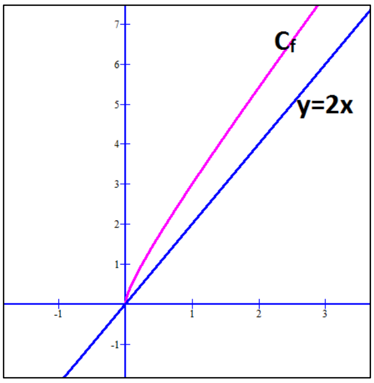
f) Si $\lim\limits_{\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

Exemple : $f(x)=\sqrt{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\quad et\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

g) Si $\lim\limits_{\infty}\frac{f(x)}{x}=a\quad avec\ a\in\mathbb{R}^*\quad et\quad \lim\limits_{\infty}(f(x)-ax)=\infty$

alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y=ax$



<u>Exemple :</u> $f(x) = 2x + \sqrt{x}$

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ et \ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$$et \ \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = +\infty$$

<u>Résumé</u>

1) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors La droite d'équation $(x = a)$ est asymptote verticale à C_f

2) Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ alors La droite d'équation $(y = b)$ est asymptote Horizontale à C_f

3) Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ Alors On calcule : $\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x}$.

- a) Si $\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.
- b) Si $\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.
- c) Si $\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ Alors on calcule $\lim\limits_{\infty}(f(x) - ax)$
  - ❖ Si $\lim\limits_{\infty}(f(x) - ax) = b$ alors la droite D d'équation: $(y = ax + b)$ est une asymptote (oblique) à $(\mathcal{C}_f)$
  - ❖ Si $\lim\limits_{\infty}(f(x) - ax) = \infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $(y = ax)$

III- Variations d'une fonction

1) Monotonie

Propriété

Soit f une fonction numérique réelle dérivable sur un intervalle I

- ✓ Si f' s'annule sur I, alors f est une fonction constante sur I
- ✓ Si f' est strictement positive sur I, sauf sur un nombre fini de points où elle s'annule alors f est une fonction strictement croissante sur I
- ✓ Si f' est strictement négative sur I, sauf sur un nombre fini de points où elle s'annule alors f est une fonction strictement décroissante sur I.

2) Exemple

Etudier les variations de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

3) Extrémums

Propriété

Soit f une fonction numérique réelle dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$

- ✓ Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extrémum relatif à la fonction sur I.
- ✓ Si la fonction admet un extrémum relatif en x_0 sur I, alors $f'(x_0) = 0$.

4) Point d'inflexion et concavité

a) Définition

Soit f une fonction numérique réelle deux fois dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$

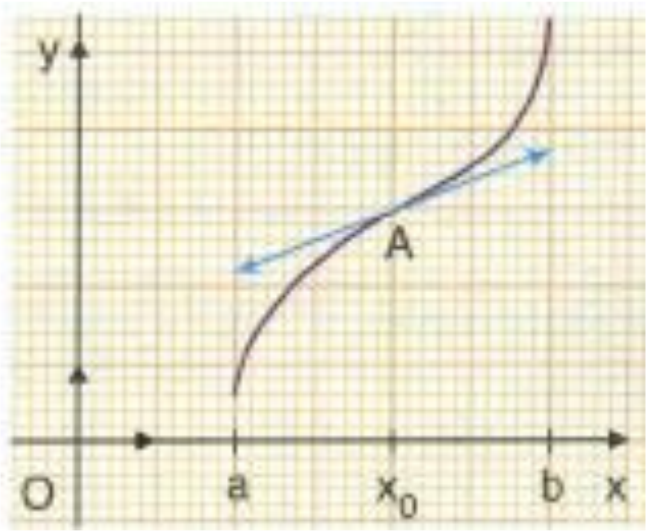
Le point $A(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** si et seulement si, la tangente traverse la courbe en ce point.

b) Théorème

Le point $A(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de (C_f) si et seulement si, la dérivée seconde f'' s'annule en x_0 en changeant de signe.

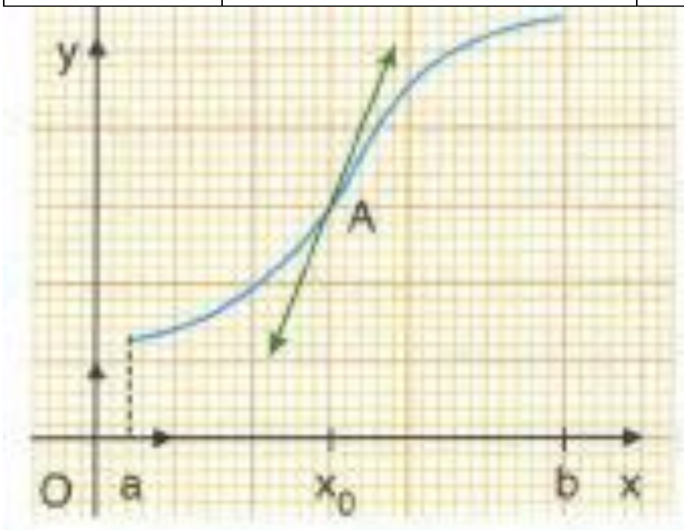
- 1er cas

x	a	x_0	b
$f''(x)$	-	0	+
Concavité de (C_f)	La concavité de (C_f) est vers le bas		La concavité de (C_f) est vers le haut



- 2ième cas

x	a	x_0	b
$f''(x)$	+	0	-
Concavité de $(\mathcal{C}_f)$	La concavité de $(\mathcal{C}_f)$ est vers le haut		La concavité de $(\mathcal{C}_f)$ est vers le bas



Remarque

Si $\left(\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \; et \; \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty\right)$

Ou $\left(\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty \; et \; \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty\right)$

Alors Le point $A(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.