I- Limites

1) Limites usuelles

Propriété1

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

Propriété2

Soit n un entier naturel non nul

- *Si n est pair alors* $\lim_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$
- *Si n et impair alors* $\lim_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$

  Exemples : $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

  $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$
- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

2) Opérations sur les limites

Dans cette partie :

- *L et L' sont deux réels*
- *a un réel qui peut être remplacé par -∞ ou +∞*
- *f et g deux fonctions numériques réelles*
- *FI signifie forme indéterminée c'est-à-dire que la limite est déterminée selon les cas.*

a) Somme

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} f(x)+g(x)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Exemple:

On veut déterminer $\lim_{x\to+\infty}(x^3+x)$

Or $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

Donc, par somme des limites, on obtient $\lim_{x\to+\infty}(x^3+x)=+\infty$

b) Produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L≠0	0	+∞	+∞	-∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	±∞	±∞	+∞	-∞	-∞
$\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$	L×L'	±∞	FI	+∞	-∞	+∞

Le signe ±∞ dépend du signe de L et du signe de l'infini considéré pour la limite de g(x)

Exemple :

On veut déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\sqrt{x}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

Donc par produit des limites on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\sqrt{x}=-\infty$

c) Quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	0	L	±∞	±∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'≠0	0	0	±∞	L'	±∞
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	±∞	FI	0	±∞	FI

Exemple :

On veut déterminer $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+2}{(x-1)^2}$

II-Continuité

1-Continuité en un point

Définition

Soit f une fonction numérique réelle définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0

On dit que f est continue en x_0 *si et seulement si :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$

Par : $\begin{cases} f(x) = \frac{sinx}{x} \; si \; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Montrer que f est continue en0

2-Continuité à gauche – continuité à droite

a)Continuité à gauche.

Soit f une fonction numérique réelle définie sur un intervalle ouvert de type $]x_0 - \alpha; x_0]$

On dit que f est continue à gauche en x_0 *si et seulement si :*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$$

b)Continuité à gauche.

Soit f une fonction numérique réelle définie sur un intervalle ouvert de type $[x_0; x_0 + \alpha[$

On dit que f est continue à droite en x_0 *si et seulement si :* $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$

3-Théorème

On dit que f est continue en x_0 *si et seulement si f est continue à gauche et à droite en* x_0

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$

Par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x-1} \; si \; x < 1 \\ f(1) = 2 \\ f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \; si \; x > 1 \end{cases}$ *Montrer que f est continue à droite de 1 et n'est pas continue à gauche de 1*

4-Continuité sur un intervalle

Soit f une fonction numérique réelle définie sur un intervalle ouvert I contenant[a,b].

- *f est continue sur]a,b[si et seulement si f est continue en tout point de]a,b[*
- *f est continue sur [a,b[si et seulement si f est continue en tout point de]a,b[et à droite de a.*
- *f est continue sur]a; b] si et seulement si f est continue en tout de]a,b[et à gauche de b.*
- *f est continue sur [a,b] si et seulement si f est continue en tout point de]a,b[et à droite de a et à gauche de b*

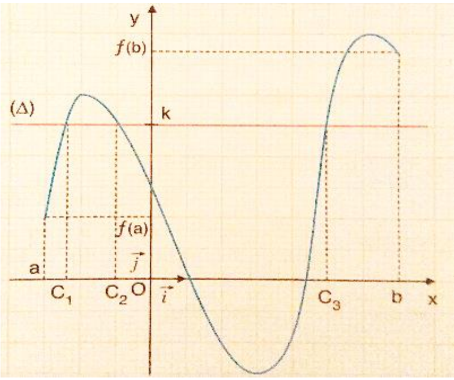
Remarque

Si f est une fonction continue sur un intervalle ouvert I, alors on peut tracer sa courbe représentative dans un repère sans lever le crayon.

6-Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété 6

Si f est une fonction continue sur un segment [a,b], Alors pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation :($x \in [a,b]$, f(x)=k) admet au moins une solution.



Dans cette situation, l'équation ($x \in [a,b]$, f(x)=k)admet, trois solutions c_1 ,c_2 et c_3

Conséquence

Si f est une fonction continue sur un segment [a,b],et f(a)f(b)<0 Alors l'équation ($x \in [a,b]$, f(x)=0) admet au moins une solution.

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^3-6x+2$

Montrer que l'équation f(x)=0 admet au moins une solution.

7-Théorème des valeurs intermédiaires

pour une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

Propriété7

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un segment [a,b], alors pour tout réel k compris entre f(a) et f(b),l'équation :(x $\in$ [a,b], f(x)=k)admet une seule solution.

Exemple

On considère la fonction f définie par f(x)=x^3-3x+1

Montrer que l'équation f(x)=0 admet une seule solution dans $\mathbb{R}$.

Théorème et Définition

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors : pour tout k de f(I) l'équation :(x $\in$ [a,b], f(x)=k) admet une seule solution.

On dit que la fonction f est une bijection de I sur f(I).

Le tableau suivant détermine f(I) selon le sens de monotonie de f et le type d'intervalle I

L'intervalle I	*Si f est strictement croissante sur I Alors f(I) est égal à*	*Si f est strictement Décroissante sur I Alors f(I) est égal à*
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} f(x),f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x),f(b)\right]$	$\left[f(b),\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x),\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} f(x),\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)\right[$

$[a,+\infty[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\right[$
$]-\infty,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

8-Fonction réciproque d'une fonction Continue et strictement monotone sur un intervalle

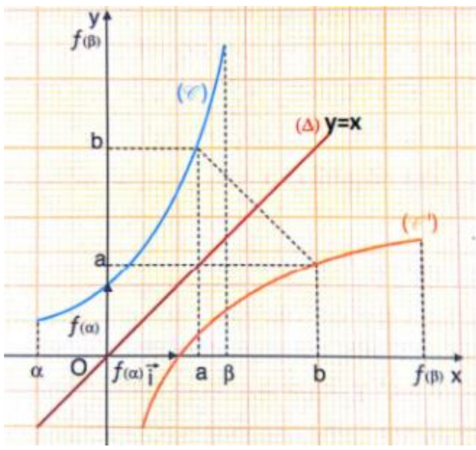
Théorème : des fonctions réciproques

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I Alors :

1) *f(I) est un intervalle J de même nature que I (fermé, ouvert ou semi ouvert) et ses extrémités sont les limites de f aux extrémités de I.*
2) *La fonction f admet une fonction réciproque définie sur J=f(I) ; plus précisément, f définit une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J donc il existe une fonction notée f^{-1} de J dans I telle que:*

$$\boxed{\begin{matrix} x\in I \\ f(x)=y \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} y\in J \\ f^{-1}(y)=x \end{matrix}}$$

3) *La fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J de même sens de monotonie que f.*
4) *Les courbes représentatives de f et f^{-1} dans le plan rapporté à un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère (la droite d'équation y=x).*



Remarque

Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J. Alors f admet une bijection réciproque f^{-1} de J sur I et : $\forall y \in J\ \ (f_0 f^{-1})(y)=y\ ;\ \forall x \in I\ )\ (f^{-1}{}_0 f)(x)=x$

9-Fonction racine n^ième^ - Puissances rationnelles

Théorème et Définition

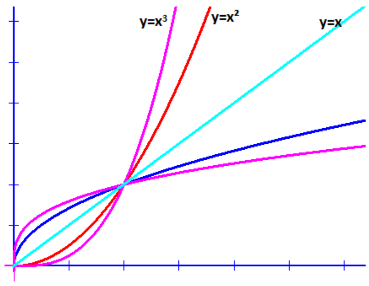
a/Fonction racine n^ième^

Soit n un nombre entier naturel différent de 0.

La fonction $x \to x^n$ définie sur $\mathbb{R}^+$, admet une fonction réciproque continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

la fonction réciproque de $x \to x^n$ est appelée fonction racine n^ième^ et notée $\sqrt[n]{}$

On pose pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$ $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$



Conséquence

Soit n un nombre entier naturel non nul.

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 , \left(\sqrt[n]{x} = y \ \Leftrightarrow x = y^n\right)$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ ,\ \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ , \sqrt[n]{x^n} = x$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 , \left(x < y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}\right)$
- $$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

Exemples

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$\sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$$

b/Puissances rationnelles

Définition

Soient x un nombre réel positif et r un nombre rationnel.

- *Si r est positif et* $r = \frac{p}{q}$ *où p et q sont des entiers naturels non nuls On définit* x^r *par :* $x^r = \sqrt[q]{x^p}$
- *Si r est négatif et* $x \neq 0$ *alors* $x^r = \frac{1}{x^{-r}}$

Exemples

- $x^3.x^4 = x^7$
- $(x^4)^3 = x^{12}$
- $\frac{x^5}{x^3} = x^2$
- $(xy)^3 = x^3y^3$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$

Calcul sur les puissances rationnelles

Soient x et y deux réels strictement positifs et r et r' deux nombres rationnels.

- $x^r.x^{r'} = x^{r+r'}$
- $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$
- $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$
- $(xy)^r = x^ry^r$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

Exemples

Calculer $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x^2-4}{x-2}}$

On a $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$ *Donc* $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x^2-4}{x-2}}=\sqrt[3]{4}$

c/ Continuité et limites de la fonction $\sqrt[n]{f}$

**Si f est une fonction positive et continue sur un intervalle I alors la fonction* $\sqrt[n]{f}$ *est continue sur I*

$*$ *Si* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{l}$

$*$ *Si* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$

Remarque

Ces propriétés restent valables à gauche et droite de x_0 *et aussi en* $-\infty$ *et* $+\infty$