Continuité d'une fonction

2BacSc

EX1 :*On considère la fonction f définie sur IR par :*

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{4x+1}-3}\qquad x\neq 2 \text{ et } f(2)=-\frac{3}{4}$$

1) *Déterminer* D_f
2) *Montrer que f est continue en 2*

EX2 : *On considère la fonction f définie sur IR par :*

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x<1 \\ f(1)=3 & \\ f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}} & x>1 \end{cases}$$

1) *Etudier la continuité de f en 1*
2) *Etudier la continuité de f sur IR*

EX3: *On considère la fonction f définie sur IR par :*

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-4}{2x-4} & x>2 \\ f(x)=1-ax^2 & x<2 \\ f(2)=b & \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue en 2

EX4: *soit f la fonction définie sur* $]1,+\infty[$ *par :*

$$(\forall x>1)\qquad f(x)=\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x^3}}{x-1}$$

1) *Vérifier que* $(\forall x>1)\ \ f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$
2) *Montrer que l'équation* $\dfrac{1}{x-1}=\sqrt{x}$ *admet une solution unique* α *sur* $\left]\dfrac{3}{2},2\right[$
3) *Montrer que* $\alpha^2(\alpha-2)=1-\alpha$
4) *Etudier le signe de f(x)*

EX5: *On considère la fonction f définie sur IR par*

$$f(x)=x^3-3x^2-5:$$

1) *Montrer que l'équation* $f(x)=0$ *admet une solution unique* α *sur* $]2,4[$
2) *Calculer* $f(3)$ *et en déduire que* $3<\alpha<4$
3) *Calculer* $f(3{,}5)$ *et en déduire que* $3<\alpha<3{,}5$
4) *En suivant les mêmes étapes, trouver un encadrement du nombre* α *d'amplitude 0,25*
5) *Donner le signe de f(x) sur IR*

EX6: *soit f la fonction définie sur* $]-\infty,2]$ *par :*

$$f(x)=x^2-4x$$

1) *Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle* J *à déterminer*
2) *Vérifier que* $x^2-4x=(x-2)^2-4\quad \forall x\in$ □
3) *Déduire l'expression de* $f^{-1}(x)$ *pour* $x\in J$

EX7: *soit g la fonction définie sur* $I=[1,+\infty[$ *par :*

$$g(x)=x-\sqrt{2x-1}$$

1) *Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle* J *à déterminer*
2) *Vérifier que* $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2\quad x\in I$
3) *Déduire l'expression de* $g^{-1}(x)$ *pour* $x\in J$

EX8: *soit h la fonction définie sur* □ *par :*

$$h(x)=\frac{x}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$$

1) *Montrer que h admet une fonction réciproque définie sur un intervalle* J *à déterminer*
2) *Montrer que* $h^{-1}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ *pour* $x\in J$

EX9: *soit f la fonction définie sur* □ *par :*

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

1) *Déterminer* D_f *et calculer les limites aux bornes*
2) *Etudier les variations de f*
3) *Soit g la restriction de f à* $[0,1[$
   a) *Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle* J *à déterminer*
   b) *Donner l'expression de* $g^{-1}(x)$

EX10 : *rendre les dénominateurs rationnels*

$$a=\frac{5}{\sqrt[5]{25}}\quad ;\quad b=\frac{2}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}\quad ;\quad c=\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$$

EX11 : *calculer les limites suivantes*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}\ ;\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{9-x}-2}{\sqrt[3]{x+26}-3}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+8}-2}{\sin^2(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{\sqrt{x^2+1}}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{2x^3+2x-1}-\sqrt[3]{9x^3-x}$$

EX12 : *résoudre dans IR*

1) *L'équation* $(E):\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{2}$
2) *L'inéquation* $(I):x+2>\sqrt[3]{8+x^3}$

EX13 : *soit f la fonction définie sur IR par :*

$$f(x)=-x^3+x^2+x$$

1) *Etudier les variations de f*
2) *Soit g définie par :* $g(x)=x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}$
   a) *Vérifier que* $g(x)=f\left(\sqrt[3]{x}\right)$ *pour* $x\geq 0$
   b) *Montrer que g est décroissante sur* $[1,+\infty[$
   c) *Montrer que l'équation* $g(x)=-1$ *admet une solution unique sur* $[1,+\infty[$.